UNIVERSITÄT SALZBURG

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Verena Bögelein**
**Sommersemester 2017**

# 13. Übungsblatt zur Topologie

(Besprechung am 27.06.17)

## Theorieaufgaben.

1. Definieren Sie den Begriff der *Orthogonalität* für Vektoren und Mengen in einem Prähilbertraum, sowie das *orthogonale Komplement* einer Menge.
2. Formulieren Sie den *Projektionssatz.*
3. Formulieren Sie den *Satz von der Orthogonalprojektion.*
4. Formulieren Sie den *Darstellungssatz von Frechet-Riesz.*

## Beweisaufgaben.

**Aufgabe 40 (Eigenschaften des orthogonalen Komplements).**
Sei $X$ ein Prähilbertraum. Beweisen Sie folgende Eigenschaften des *orthogonalen Komplements* $A^\perp$ einer Menge $A \subset X$:

(a) *Satz des Pythagoras*: $x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$.

(b) $A^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $X$.

(c) $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.

(d) $A^\perp = \left(\overline{\operatorname{span}(A)}\right)^\perp$.

**Aufgabe 41 (Eigenschaften im Hilbertraum).**
Sei $X$ ein Hilbertraum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Zeigen Sie:

(a) $x_k \rightharpoonup x$ und $\|x_k\| \to \|x\|$ bei $k \to \infty \iff x_k \to x$ für $k \to \infty$.

(b) $x_k \to x$ für $k \to \infty \iff x_k \rightharpoonup x$ bei $k \to \infty$ und $\limsup_{k\to\infty} \|x_k\| \le \|x\|$.

(c) Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, $y' \in Y'$ und $x'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von $y'$ auf $X$ mit $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$. Dann ist diese Fortsetzung eindeutig.

(d) $X$ ist reflexiv.

*Hinweis:* Verwenden Sie den *Darstellungssatz von Frechet-Riesz.*

**Aufgabe 42 (Schauderbasis).**
Sei $X$ ein Banachraum. Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt *Schauderbasis*, falls jedes $x \in X$ eindeutig als konvergente Reihe $x = \sum_{n=1}^\infty \xi_n b_n$ mit $\xi_n \in \mathbb{K}$ dargestellt werden kann. Beweisen Sie nun folgende Aussagen:

(a) Besitzt $X$ eine Schauderbasis, so ist $X$ separabel.

(b) Die Folge der Einheitsvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Schauderbasis in $\ell^p$ für $1 \le p < \infty$, jedoch nicht in $\ell^\infty$.