Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

4. Übungsblatt zur Topologie

(Besprechung am 04.04.17)

Theorieaufgaben.

1. Definieren Sie präzise den Begriff des *Dualraums* eines normierten Vektorraums sowie den Begriff der *Sublinearität* einer Abbildung.

2. Geben Sie eine präzise Formulierung der *reellen algebraischen Version des Satzes von Hahn-Banach* an.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 10 (Komplexe Version von Hahn-Banach - Vorbereitungen).
In dieser Aufgabe bereiten wir den Beweis einer Version des Satzes von Hahn-Banach für komplexe Vektorräume vor, die sich aus dem Satz für reelle Vektorräume ergeben wird. Dazu befassen wir uns zunächst mit dem Zusammenhang von $\mathbb{R}$-linearen und $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen.

Sei dazu X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) Ist $\ell\colon X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional und setzt man

$$\tilde{\ell}(x) := \ell(x) - i\ell(ix),$$

so ist $\tilde{\ell}\colon X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional und $\ell = \operatorname{Re}(\tilde{\ell})$.

(b) Sei $h\colon X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, $\ell = \operatorname{Re}(h)$ und $\tilde{\ell}$ definiert wie in (a). Dann ist ℓ $\mathbb{R}$-linear und $\tilde{\ell} = h$.

(c) Ist $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, so gilt die Äquivalenz

$$|\ell(x)| \le p(x) \text{ für alle } x \in X \iff |\operatorname{Re}(\ell)(x)| \le p(x) \text{ für alle } x \in X.$$

(d) Ist X ein normierter Raum und $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear und stetig, so ist $\|\ell\| = \|\operatorname{Re}(\ell)\|$.

Bemerkung: Wir haben damit gezeigt, dass es sich bei der Abbildung $\operatorname{Re}\colon \ell \mapsto \operatorname{Re}(\ell)$ um eine bijektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen dem Raum der $\mathbb{C}$-linearen und dem Raum der reellwertigen $\mathbb{R}$-linearen Funktionale handelt und dass diese im Falle normierter Räume sogar isometrisch ist.

Aufgabe 11 (Komplexe Version von Hahn-Banach - Beweis).
Benutzen Sie nun die Ergebnisse aus Aufgabe 10, um die folgende *komplexe algebraische Version des Satzes von Hahn-Banach* zu beweisen, indem Sie die reelle algebraische Version des Satzes von Hahn-Banach auf ein geeignetes $\mathbb{R}$-wertiges Funktional anwenden.

Satz (Hahn-Banach; komplexe algebraische Version). Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $U \subset X$ ein Untervektorraum. Ferner sei $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ linear mit

$$\operatorname{Re}(\ell)(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L\colon X \to \mathbb{C}$, d.h. $L\big|_U = \ell$ mit

$$\operatorname{Re}(L)(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Aufgabe 12 (Fortsetzungsversion von Hahn-Banach).

Beweisen Sie mithilfe der Aufgaben 10 und 11 die sogenannte *Fortsetzungsversion des Satzes von Hahn-Banach*, indem Sie die reelle bzw. komplexe algebraische Version des Satzes von Hahn-Banach anwenden.

Satz (Hahn-Banach; Fortsetzungsversion). Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $U \subset X$ ein Untervektorraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional $u'\colon U \to \mathbb{K}$ existiert dann ein stetiges lineares Funktional $x'\colon X \to \mathbb{K}$ mit

$$x'\big|_U = u' \quad \text{und} \quad \|x'\| = \|u'\|.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine geeignete sublineare Funktion p und beweisen Sie anschließend die Abschätzungen, die für die Anwendungen der algebraischen Versionen des Satzes notwendig sind.