UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

5. Übungsblatt zur Topologie
(Besprechung am 25. April 2017)

Theorieaufgaben.

1. Formulieren Sie präzise zwei Korollare zum Satz von Hahn-Banach.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 13 (**Stetige Projektion**).
Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein endlichdimensionaler Unterraum von X. Zeigen Sie, dass es dann einen *Projektor* - d.h. eine *stetige Projektion* - P gibt mit $Y = P(X)$.

Bemerkung: Für einen normierten Raum Z heißt eine lineare Abbildung $P\colon Z \to Z$ *Projektion*, wenn sie *idempotent* ist, d.h. wenn $P^2 = P$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von Y, die Existenz von Funktionalen $b'_1, \dots, b'_n \in X'$ mit $b'_i(b_j) = \delta_{ij}$.

Aufgabe 14 (**Fortsetzung von Operatoren**).
Wir betrachten den linearen stetigen Operator $\mathrm{id}_{c_0}\colon c_0 \to c_0$ auf c_0. Zeigen Sie, dass für die Operatornorm einer jeden Fortsetzung $T\colon c \to c_0$ von id_{c_0} auf c gilt: $\|T\| \geq 2$.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu die Menge $M := \{x \in c_0 \colon \|x - \mathbb{1}\|_\infty \leq 1\}$ - wobei $\mathbb{1}$ die konstante Einsfolge bezeichne - und zeigen Sie, dass zu $y \in c_0$ und allen $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ existiert mit $\|y - x\|_\infty \geq 2 - \varepsilon$.

Bemerkung: Diese Aufgabe dient dazu, zu zeigen, dass die Aussage der normgleichen Fortsetzung eines Funktionals aus dem Satz von Hahn-Banach falsch wird, wenn man zu allgemeineren linearen Operatoren übergeht.

Aufgabe 15 (**Ungleichungen von Clarkson**).
Seien $u, v \in L^p(\Omega)$ und $1 < p < \infty$ mit $p' := \frac{p}{p-1}$. Zeigen Sie für $2 \leq p < \infty$ die Ungleichungen

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\|v\|_{L^p(\Omega)}^p \tag{I}$$

und

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}^{p'} \geq \left(\frac{1}{2}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\|v\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{p'-1}. \tag{II}$$

Zeigen Sie außerdem für $1 < p \leq 2$ die Ungleichungen

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\|v\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{p'-1} \tag{III}$$

und

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \geq \frac{1}{2}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\|v\|_{L^p(\Omega)}^p. \tag{IV}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $w, z \in \mathbb{R}$, dass im Falle $1 < p \leq 2$ gilt:

$$\left| \frac{z+w}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{z-w}{2} \right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p \right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{V}$$

Zeigen Sie weiterhin, dass im Falle $2 \leq p < \infty$ gilt:

$$\left| \frac{z+w}{2} \right|^{p} + \left| \frac{z-w}{2} \right|^{p} \leq \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p. \tag{VI}$$

Sie können dabei für $1 < p \leq 2$ und $0 \leq t \leq 1$ folgende Abschätzung ohne Beweis nutzen:

$$\left(\frac{1+t}{2} \right)^{p'} + \left(\frac{1-t}{2} \right)^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^p \right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{VII}$$

Wichtig: Um die Ungleichung (VII) anwenden zu können, müssen Sie erst das eigentliche Problem so transformieren, dass die Voraussetzungen für (VII) erfüllt sind. Desweiteren könnten die Minkowski- bzw. die umgekehrte Minkowski-Ungleichung hilfreich sein.

Aufgabe 16 (Gleichmäßige Konvexität der L^p-Räume).

Folgern Sie mithilfe der Ungleichungen von Clarkson, dass $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ *gleichmäßig konvex* ist, das heißt:

Definition (Gleichmäßige Konvexität): Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum. Die Norm $\|.\|_X$ auf X heißt *gleichmäßig konvex*, falls für jedes ε mit $0 < \varepsilon \leq 2$, ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass für $x, y \in X$ gilt: Ist

$$\|x\|_X = \|y\|_X = 1 \quad \text{und} \quad \|x - y\|_X \geq \varepsilon,$$

so ist

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X \leq 1 - \delta.$$

In diesem Fall wird der normierte Raum X ebenfalls *gleichmäßig konvex* genannt.

Wir wünschen Ihnen schöne Osterferien !
