UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

6. Übungsblatt zur Topologie

(Besprechung am 02. Mai 2017)

Theorieaufgaben.

1. Formulieren Sie präzise die *Trennungsversion des Satzes von Hahn-Banach.*

Beweisaufgaben.

Aufgabe 17 (Falsche Ungleichungen).
Sie haben in der Vorlesung den Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes kennen gelernt. In diesem wurde für den Beweis, dass $\lambda_g = \lambda$ gilt, benutzt, dass die folgende Ungleichung nicht für alle $t > 0$ erfüllt sein kann:

$$1 + at^p \geq (1+t)^p \quad \text{für } 1 < p \leq 2 \text{ und } a > 0.$$

Beweisen Sie, dass diese Ungleichung tatsächlich nicht für alle $t > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 18 (Fortsetzung des Grenzwerts).
Wir betrachten den Raum $\ell^\infty(\mathbb{R})$ der beschränkten reellwertigen Folgen. Wir definieren die Abbildung $p\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) := \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung p ist sublinear.

(b) Es gibt ein lineares Funktional $G\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq G(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{und} \quad G(x) = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ für alle } x \in c \subset \ell^\infty.$$

Aufgabe 19 (Minkowski-Funktional).
Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subset X$ eine konvexe Menge, in deren Innerem der Nullvektor 0 liegt. Dann ist das *Minkowski-Funktional* $p_A\colon X \to \mathbb{R}$ zu A definiert durch

$$p_A(x) := \inf\{s > 0\colon x \in sA\},$$

wobei $sA := \{y \in X\colon y = s \cdot x \text{ und } x \in A\}$.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) p_A ist sublinear.

(b) $\{x \in X\colon p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X\colon p_A(x) \leq 1\}$. Was gilt für offene A ?

(c) Zu jedem $w \in X \setminus A$ existiert ein $z \in X'$ mit

$$z(x) \leq p_A(x) \text{ für alle } x \in X$$

und weiterhin

$$z(w) = p_A(w) \geq 1.$$

(d) Ist $U \subset X$ offen und konvex mit $0 \notin U$, dann existiert $y \in X'$ mit $y(x) < 0$ für alle $x \in U$.

Hinweis: Setzte $A := U - u$ für ein fest gewähltes $u \in U$ mit $U - u := \{v \in X : v = w - u \text{ und } w \in U\}$.

(e) Geben Sie kurz an, welche Modifikationen nötig sind, um im Fall eines normierten $\mathbb{C}$-Vektorraums X die Aussage (d) mit $\operatorname{Re} y(x) < 0$ statt $y(x) < 0$ zu zeigen.