Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

7. Übungsblatt zur Topologie

(Besprechung am 09.05.2017)

Theorieaufgaben.

1. Definieren sie präzise die Begriffe des *Bidualraums*, der *kanonischen Einbettung* in diesen, sowie den Begriff der *Reflexivität* eines Banachraums.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 20 (Existenz unstetiger linearer Operatoren).
Sei X ein beliebiger unendlichdimensionaler normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass es dann stets ein unstetiges lineares Funktional $f\colon X \to \mathbb{K}$ auf X gibt.

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass jeder Vektorraum X nach dem Auswahlaxiom eine Basis besitzt.

Aufgabe 21 (Stetigkeit zweier linearer Operatoren).
Sei X ein normierter Raum und $S, T\colon X \to X$ lineare Operatoren auf X, welche die Gleichung $ST - TS = \mathrm{Id}_X$ erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass S und T nicht beide zugleich stetig sein können.

Aufgabe 22 (Vervollständigung metrischer Räume).
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $C(X) := \{(x) \in X^{\mathbb{N}} \mid (x) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge}\}$ die Menge aller Cauchyfolgen in X.

(a) Zeigen Sie, dass für $(x), (y) \in C(X)$ durch

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \ :\Longleftrightarrow\ (d(x_i, y_i))_{i\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}$$

eine Äquivalenzrelation auf $C(X)$ definiert wird.

Im Folgenden bezeichne $[(x)]$ die Äquivalenzklasse zum Repräsentanten $(x) \in C(X)$ und $\tilde{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

(b) Zeigen Sie, dass für $(x), (y) \in C(X)$ durch

$$\tilde{d}([(x)], [(y)]) := \lim_{i\to\infty} d(x_i, y_i)$$

auf $\tilde{X}$ eine Metrik definiert wird.

(c) Zeigen Sie, dass $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Einbettung $E\colon X \to \tilde{X}$, definiert durch $x \mapsto [(x)]$, wobei $(x) \equiv x$ konstant sei, eine *Isometrie* ist, d.h. es gilt $\tilde{d}(E(x), E(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

(e) Zeigen Sie, dass $\overline{E(X)} = \tilde{X}$.