UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

2. Blatt zur Übung Analysis I
(Besprechung am 16.10.2017)

Theorieaufgaben:

1. Erklären Sie das *Prinzip der vollständigen Induktion*.
2. Definieren Sie die Begriffe *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv*.

Beweisaufgaben:

Aufgabe 5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x, y, a, b, x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $x_i \leq y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

(b) Falls $0 < x_i \leq y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

(c) Falls $0 < x < y$, so gilt

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

(d) Falls $0 < x < a$ und $0 < b < y$, so gilt

$$\frac{x}{y} < \frac{a}{b}.$$

Aufgabe 6. Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie folgende Identitäten für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \tfrac{1}{2} n(n+1)$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

(c) $\displaystyle 1 + \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

(d) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Aufgabe 7. Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie:
(a) Für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N},$$

wobei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ den Binomialkoeffizient "n über k" bezeichne.
Hinweis: Beweisen Sie dafür zunächst die Identität

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$
Anmerkung: Die linke Seite der Gleichung ist gerade die Zeilensumme im Pascal'schen Dreieck:

$$\begin{matrix} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$
Anmerkung: Die linke Seite nennt man die alternierende Zeilensumme im Pascal'schen Dreieck.

Aufgabe 8. Beweisen Sie den in der Vorlesung formulierten Multinomialsatz: Für alle $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x_1, \ldots, x_m$ gilt

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{0 \le \alpha_1, \ldots, \alpha_m \le n \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n}} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}.$$

Hinweis: Vollständige Induktion über m.