UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

8. Blatt zur Übung Analysis I

(Besprechung am 27.11.2017)

Theorieaufgaben.

1. Erklären Sie den Begriff *absolute Konvergenz* sowie das *Wurzel-* und das *Quotientenkriterium.*
2. Erklären Sie die Begriffe *Potenzreihe* und *Konvergenzradius.*

Beweisaufgaben.

Aufgabe 27. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sqrt[n]{n}-\tfrac{1}{2}\right)^n$.

Aufgabe 28. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $|a| > 1$, $|b| > 1$ und $a - b = 1$. Wir definieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $a_0 = a$, $a_n = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = -b$, und $b_n = b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sowie deren Cauchy-Produkt auf Konvergenz.

Aufgabe 29. Die sog. Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$

ist in der Vorlesung anhand des Verdichtungskriteriums untersucht worden. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Konvergenz der Reihe alternativ mit dem Kriterium von Raabe zu analysieren, wobei schlussendlich diejenigen $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ ermittelt werden sollen, für die die Reihe konvergent ist.

(a) Zeigen Sie zunächst die Bernoulli-Ungleichung für rationale Exponenten:
- $(1+x)^q \geq 1 + qx$ für alle $x > -1$ und $q \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty)$;
- $(1+x)^q \leq 1 + qx$ für alle $x > -1$ und $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Hinweis: Sie dürfen im Beweis die Bernoulli-Ungleichung aus der Vorlesung für $q \in \mathbb{N}$ benützen.

(b) Verwenden Sie nun die in (a) gezeigte Bernoulli-Ungleichung, um die Voraussetzungen des Kriteriums von Raabe zu überprüfen, und entscheiden Sie, für welche $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ die Dirichletreihe konvergiert.

Aufgabe 30. Für eine Potenzreihe mit Konvergrenzradius $R \in [0, \infty]$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die Konvergenz im Allgemeinen nur im Inneren des Konvergenzkreises $B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < R\}$ gesichert. Hingegen ist das Verhalten auf dem Rand $\partial B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| = R\}$ des Konvergenzkreises delikat und allgemeine Konvergenzaussagen sind nicht möglich. Stattdessen ist für eine Betrachtung der Konvergenz am Rand eine genauere Analyse der betreffenden Reihe erforderlich. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen auf dem Rand deren Konvergenzkreises:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z^k$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$; (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$.