UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

10. Blatt zur Übung Analysis I

(Besprechung am 11.12.2017)

Theorieaufgaben.

1. Geben Sie die Definition der Funktionen *sin* und *cos* sowie deren Reihendarstellung an.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 35. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Abbildung f heißt *dehnungsbeschränkt* oder *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L > 0$ existiert so, dass

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$$

für alle $x, y \in [a,b]$ gilt. Zeigen Sie, dass es für Lipschitz-stetige Funktionen f zu jedem $y \in \big(\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}\big)$ ein $x \in [a,b]$ gibt mit $f(x) = y$.
Hinweis: Definieren Sie eine passende Intervallschachtelung.
Anmerkung: Diese Aussage heißt *Zwischenwertsatz* für dehnungsbeschränkte Funktionen.

Aufgabe 36. Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die nachstehenden Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen:

(a) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;

(b) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$;

(c) $\tan(x + y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$, sofern $x,\ y,\ x + y \notin \big\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\big\}$;

(d) $\sin(x) = \dfrac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$, sofern $x \notin \big\{(2k+1)\pi \colon k \in \mathbb{Z}\big\}$;

(e) $\cos(x) = \dfrac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$, sofern $x \notin \big\{(2k+1)\pi \colon k \in \mathbb{Z}\big\}$.