Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

12. Blatt zur Übung Analysis I

(Besprechung am 08.01.2018)

Theorieaufgaben.

1. Definieren Sie im Kontext von Mengen die Begriffe *innerer Punkt*, *Randpunkt* und *offen*.
2. Definieren Sie den Begriff der *Stetigkeit* einer Funktion.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 42. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. In der Vorlesung ist der Limes superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$ als der größte Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert worden. In dieser Aufgabe wollen wir noch eine äquivalente Charakterisierung für den Limes superior für Folgen herleiten. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Anmerkung: Analog lässt sich für den kleinsten Häufungswert zeigen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

Aufgabe 43. Neben dem $\limsup$-Begriff für Folgen (siehe Aufgabe 42) kennen Sie aus der Vorlesung auch den Begriff des (größten) Häufungswertes für reellwertige Funktionen bei einem Grenzübergang. Dieser soll in dieser Aufgabe studiert werden. Bestimmen Sie für die folgenden reellen Funktionen f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, alle ihre Häufungswerte, ihren Limes superior und Limes inferior (jeweils bei Annäherung an den angegebenen Punkt), sowie (falls existent) den Grenzwert:

(a) $f_1(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$ bei $x \to 0$;

(b) $f_2(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2}{x}\right)$ bei $x \to 0$;

(c) $f_3(x) = \tan(x)$ bei $x \to \infty$;

(d) $f_4(x) = \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ bei $x \to \infty$.

Für komplexe Funktionen macht der Begriff des größten bzw. kleinsten Häufungswertes keinen Sinn. Bestimmen Sie daher in Abhängigkeit von $n, m \in \mathbb{N}$ für die folgende Funktion f_5 nur deren Häufungswerte bei Annäherung an den angegebenen Punkt und (falls existent) den Grenzwert:

(e) $f_5(z) = \frac{z^m-1}{z^n-1}$ bei $\mathbb{C} \ni z \to 1$.

Aufgabe 44. Gegeben seien die Mengen

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| \leq 3\}$,
$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 3\}$,
$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| = 3\}$,
$M_4 = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) < 0,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$,
$M_5 = \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(q_1, q_2) \colon q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$,
$M_6 = \mathbb{R}$.

Geben Sie für jede der Mengen deren innere Punkte sowie deren Randpunkte an, und entscheiden Sie, ob die jeweilige Menge offen ist. Beweisen Sie alle ihre Vermutungen.

Aufgabe 45.

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

(c) Es seien $h_1, h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $h_1(x) = h_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass h_1 und h_2 auf ganz $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

Aufgabe 46. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, 1 - \frac{1}{n}], \\ n(1-x) & \text{falls } x \in (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}), \\ -1 & \text{falls } x \in [1 + \frac{1}{n}, 2]. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig auf $[0,2]$ ist.

(b) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Ist f stetig?

Das gesamte Analysis-Team wünscht Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und ein glückliches neues Jahr 2018!