**Fachbereich Mathematik**
**Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein**
**Wintersemester 2017/18**

# 14. Blatt zur Übung Analysis I

(Besprechung am 22.01.2018)

***Theorieaufgaben.***

1. Formulieren Sie den Satz zur Differentiation der Umkehrfunktion.
2. Erklären Sie, wie man Extremwerte zu einer gegebenen Funktion bestimmt (*Stichwörter: kritische Punkte, lokale/globale Minima/Maxima*).

***Beweisaufgaben.***

**Aufgabe 51.** Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Arcusfunktionen arccos, arctan, und arccot sowie die Ableitungen der Areafunktionen arsinh, arcosh, artanh, und arcoth. Geben Sie dabei immer auch den Definitionsbereich der jeweiligen Ableitungsfunktion an.

**Aufgabe 52.** In dieser Aufgabe diskutieren wir eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, jedoch nirgends differenzierbar, ist. Sei dazu die Funktion $g_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_0(x) = |x - k|$, falls $x \in [-\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv Funktionen $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g_n(x) = 4^{-n} g_0(4^n x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Schließlich setzen wir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie $g_0$, $g_1$, $g_2$ und $g_0 + g_1 + g_2$.

(b) Bestimmen Sie die Periode von $g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Zeigen Sie, dass $f$ wohldefiniert ist, d. h., dass die Reihe, durch die $f$ definiert ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. (*Hinweis:* Zerlegen Sie die Reihe $f(x) - f(x_0)$ in zwei Teile, die Sie jeweils durch $\varepsilon$ abschätzen können.)

(e) Zeigen Sie, dass $f$ in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. (*Anleitung:* Bestimmen Sie dazu einen Parameter $h_n$ so, dass $g_k$ für $k \leq n$ auf dem Intervall $(\min\{x, x + h_n\}, \max\{x, x + h_n\})$ linear ist. Berechnen Sie dann den Differenzenquotienten von $g_k$ bei $x$ zunächst für $k \leq n$ und anschließend für $k > n$. Folgern Sie schließlich, dass der Differenzenquotient von $f$ bei $x$ nicht existiert.)

**Aufgabe 53.** Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die $n$-te Ableitung der folgenden Funktionen $f_i$ auf deren Definitionsbereich $M_i$ ($i \in \{1, \ldots, 7\}$):

(a) $f_1(x) = \log(x)$, $M_1 = (0, \infty)$;

(b) $f_2(x) = a^x$ mit $a > 0$, $M_2 = \mathbb{R}$;

(c) $f_3(x) = x^t$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $M_3 = (0, \infty)$;

(d) $f_4(x) = \sin(x)$, $M_4 = \mathbb{R}$;

(e) $f_5(x) = \cos(x)$, $M_5 = \mathbb{R}$;

(f) $f_6(x) = \sinh(x)$, $M_6 = \mathbb{R}$;

(g) $f_7(x) = \cosh(x)$, $M_7 = \mathbb{R}$.

**Aufgabe 54.** In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist, d. h. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ die $n$-ten Ableitungen von $f$ gegeben sind durch

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}},$$

wobei $p_n$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist, das Sie nicht näher bestimmen brauchen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \searrow 0} x^{-n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (*Hinweis:* Stellen Sie $e^{\frac{1}{x}}$ als Reihe dar und schätzen Sie diese geeignet ab.)

(c) Folgern Sie aus (a) und (b) via vollständiger Induktion, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(d) Schließen Sie Ihr Argument, indem Sie nun begründen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.