Gleichungen für Zerfallsreihen (Bateman equations)

Mittlere Lebensdauer

Für eine Anzahl von Teilchen $N_{(t)}$ gilt: $N_{(t)} = N_{(0)} e^{-\lambda t}$

Gleich wir für die Aktivität A(t): $A_{(t)} = A_{(0)} e^{-\lambda t}$

Die mittlere Lebensdauer τ erhalten wir über die Integration über die Zeit

$$N_0 \tau = \int_0^\infty N dt = \int_0^\infty N_{(0)} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}\left[N_{(0)} e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = -\frac{N_{(0)}}{\lambda}[0-1]$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

oder über die Integration über N

$$N_0 \tau = \int_0^{N_0} t dN = \int_0^{N_0} -\frac{\ln N_{(t)} - \ln N_{(0)}}{\lambda} dN = -\frac{1}{\lambda}\left[N_{(t)} \ln N_{(t)} - N_{(t)} - \ln N_{(0)} N_{(t)}\right]_0^{N_0} =$$

$$N_0 \tau = -\frac{1}{\lambda}\left[N_{(0)} \ln N_{(0)} - N_{(0)} - \ln N_{(0)} N_{(0)}\right]$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Zerfallskette

Mutternuklid N_1 und Tochternuklid N_2 (bzw. Aktivitäten A_1 und A_2)

Für den Zerfall eines Mutternuklides N_1 in das Tochternuklid N_2 mit den Zerfallskonstanten λ_1 und λ_2 erhält man die Lösung für $N_{2(t)}$ über die Differentialgleichungen:

Zu beachten: N_1 und N_2 ist jeweils die Teilchenzahl, die dazugehörigen Aktivitäten sind $A_1 = \lambda_1 N_1$, $A_2 = \lambda_2 N_2$,… usw.

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t}$$

Beide Seiten werden nun mit $e^{\lambda_2 t}$ multipliziert

$$e^{\lambda_2 t}\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{1(0)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Die linke Seite der Gleichung ist die Ableitung des Produktes $N_2 e^{\lambda_2 t}$, wir können daher schreiben:

$$\frac{d}{dt}(N_2 e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_{1(0)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

und diese Gleichung einfach integrieren:

$$N_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + C e^{-\lambda_2 t}$$

Für t = 0; $N_2 = N_{2(0)}$ ergibt sich für die Konstante C:

$$C = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} + N_{2(0)}$$

Für C eingesetzt erhält man die Lösung für N_2

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} + N_{2(0)} e^{-\lambda_2 t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{2(0)} e^{-\lambda_2 t}$$

Für $N_{2(0)} = 0$ und die Lösung etwas anders angeschrieben, vereinfacht sich die Lösung, die in den Koeffizienten $\lambda_1/(\lambda_2-\lambda_1)$ und $\lambda_1/(\lambda_1-\lambda_2)$ bereits den Lösungsalgorithmus für die Bateman Equations andeutet:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_{1(0)} e^{-\lambda_2 t}$$

Um die Aktivitätsverhältnisse zu erhalten, die letztendlich in der Meßtechnik von Bedeutung sind, ist die Gleichung auf beiden Seiten mit λ_2 zu multiplizieren:
Beachte: $A_1 = \lambda_1 N_1$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} \quad /.\lambda_2$$

$$A_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} A_{1(0)} e^{-\lambda_2 t}$$

Mutternuklid N_1, Tochternuklide N_2 und N_3 (Aktivitäten A_1, A_2 und A_3)

Analog erfolgt die Lösung für 3 Zerfallsglieder, in denen die Struktur der Koeffizienten für die allgemeine Lösung der Bateman Gleichungen schon deutlich wird:

$$\frac{dN_3}{dt} = -\lambda_3 N_3 + \lambda_2 N_2 ,$$

Nach Umformung und Multiplikation mit $e^{-\lambda_3 t}$ erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}(N_3 e^{\lambda_3 t}) = \lambda_2 N_2$$
$$\frac{d}{dt}(N_3 e^{\lambda_3 t}) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} N_{1(0)} e^{(\lambda_3-\lambda_1)t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} N_{1(0)} e^{(\lambda_3-\lambda_2)t}$$

Die Integration liefert:

$$N_3 e^{\lambda_3 t} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} N_{1(0)} e^{(\lambda_3-\lambda_1)t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} N_{1(0)} e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} + C$$

Für t = 0 sind $N_{3(0)} = 0$ und $N_{2(0)} = 0$, daher ist die Lösung für C:

$$C = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} N_{1(0)} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} N_{1(0)}$$

Einsetzen für C und Division durch $e^{\lambda_3 t}$ liefert:

$$N_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} N_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1\lambda_2 N_{1(0)} e^{-\lambda_3 t}\left[\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}\right]$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ergibt umgeformt:

$$\left[\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}\right] = -\left[\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\right]$$

Eingesetzt in vorige Gleichung erhalten wir:

$$N_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} N_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)} N_{1(0)} e^{-\lambda_3 t}$$

Allgemein angeschrieben, mit den Koeffizienten C_1, C_2, und C_3

$$N_3 = C_1 N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + C_2 N_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} + C_3 N_{1(0)} e^{-\lambda_3 t}$$

Um wieder die Aktivitätsverhältnisse zu erhalten, ist die Gleichung auf beiden Seiten mit λ_3 zu multiplizieren:
Beachte: $A_1 = \lambda_1 N_1$; $A_3 = \lambda_3 N_3$

$$N_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} N_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} N_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)} N_{1(0)} e^{-\lambda_3 t} \quad \Big| \cdot \lambda_3$$
$$A_3 = \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} A_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} A_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)} A_{1(0)} e^{-\lambda_3 t}$$

Mutternuklid N_1, n Tochternuklide N_2, N_3, …., N_n; (Aktivitäten A_1,….,A_n)

’Für Zerfallsketten mit n Gliedern hat Harry Bateman 1906 die allgemeine Lösung veröffentlicht (**H. Bateman** "Solution of a System of Differential Equations Occurring in the Theory of Radioactive Transformations," Proc. Cambridge Phil. *Soc. IS*, 423 (1910). Für eine Zerfallskette mit m Gliedern erfolgt die

Berechnung der Aktivität des n-ten Nuklides ($1 \le n \le m$) unter der Voraussetzung, dass für t = 0 nur die Anfangsaktivität A_1 der Muttersubstanz vorhanden ist und es gilt $A_2, A_3, \ldots, A_n = 0$, nach folgendem Schema:

$$A_n = C_1 A_{1(0)} e^{-\lambda_1 t} + C_2 A_{1(0)} e^{-\lambda_2 t} + \ldots + C_n A_{1(0)} e^{-\lambda_n t}$$

$$C_1 = \frac{\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} \lambda_n}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\ldots(\lambda_n - \lambda_1)}$$

$$C_2 = \frac{\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} \lambda_n}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)\ldots(\lambda_n - \lambda_2)}$$

....

$$C_n = \frac{\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} \lambda_n}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_3 - \lambda_n)\ldots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}$$

MathCad Routine für die Zerfallsberechnung von Rn-222 mit den Folgeprodukten Po-218 (3.05min), Pb-214 (26.8min) und Bi-214 (19.9min), die nach ca. 3 Stunden in ein säkulares Gleichgewicht kommen.

Zerfallskonstante, Halbwertszeiten in min für: Rn-222,Po-218,Pb-214,Bi-214

$$\lambda := \overrightarrow{\left[\frac{\ln(2)}{((3.825 \cdot 24 \cdot 60 \quad 3.05 \quad 26.8 \quad 19.9))^T}\right]} \qquad \Lambda := \lambda$$

decay saturation coefficients

$$S(tb, a, n) := \frac{1}{\Lambda_a} \cdot \sum_{i=a}^{n} \left[e^{-\lambda_i \cdot tb} \cdot \prod_{j=a}^{n} \frac{\lambda_j}{(\Lambda_j - \Lambda_i) + (j = i)} \right]$$

S mean

$$Sm(ta, tb, a, n) := \frac{1}{(tb - ta) \cdot \Lambda_a} \cdot \sum_{i=a}^{n} \left[\frac{e^{-\lambda_i \cdot tb} - e^{-\lambda_i \cdot ta}}{-\Lambda_i} \cdot \prod_{j=a}^{n} \frac{\lambda_j}{(\Lambda_j - \Lambda_i) + (j = i)} \right]$$

Syntax:

S(t,a,n) Aufbau n-tes Glied aus Zerfall von a-tem Glied
oder Zerfall von a-tem Glied für a = n
analog für die Mittelwertberechnung

S(t,0,0) Rn-222 Zerfall als f(t)
S(t,0,1) Po-218 Aufbau aus Rn-222 Zerfall
S(t,0,2) Pb-214 Aufbau aus Rn-222 Zerfall
S(t,0,3) Bi-214 Aufbau aus Rn-22 Zerfall

S(t,1,1) Po-218 Zerfall
S(t,1,2) Pb-214 Aufbau aus Po-218 Zerfall
usw.