

SKRIPTUM

zur Lehrveranstaltung

GEOMETRIE FÜR LEHRAMT

von

Ferdinand Österreichler

Fachbereich Mathematik
der
Universität Salzburg

Salzburg

Oktober 2014

Contents

1	Einleitung	5
2	Synthetische Geometrie	9
2.1	Kegelschnitte	9
2.1.1	Einstieg	9
2.1.2	Erarbeitung mit Hilfe der Darstellenden Geometrie . .	11
2.1.3	Brennpunkt-Leitlinie-Parametrisierung	11
2.2	Die Zentralperspektive	16
2.2.1	Der Satz von Pappos	17
2.2.2	Ausblick: Pappos und die harmonische Teilung	24
2.2.3	Übungsaufgabe zur Zentralperspektive	28
2.2.4	Der Satz von Desargues	33
2.2.5	Ausblick: Falsche Perspektive	35
3	Analytische Geometrie	37
3.1	Ausgewählte Texte aus Descartes' Geometrie	37
3.2	Tangentenkonstruktion für die Kegelschnitte nach Fermat . . .	41
3.3	Darstellung der Kegelschnitte in Cartesischen Koordinaten . .	44
3.3.1	Parabel	44
3.3.2	Ellipse und Hyperbel	45
3.3.3	Darstellung mit Hilfe einer Leitlinie	48
3.3.4	Darstellung in Polarkoordinaten	51
3.3.5	Archimedes' Quadratur der Parabel	52
3.3.6	Klassifikation der Kegelschnitte mit Hilfe von Schwer- linien	55
3.4	Anwendungen der Kegelschnitte	57
3.4.1	Das Delische Problem	57
3.4.2	Physik und Astronomie	59

3.4.3	Sonnenuhren, Optik, Akustik, Architektur und Erdab-	
	plattung	67
3.5	Quadriken	73
3.5.1	Normalformtypen	73
3.5.2	Wiederholung zu Bewegungen (Isometrien) im \mathbb{R}^2 . . .	74
3.5.3	Quadriken	76
3.6	Hüllkurven und Krümmung	88
3.6.1	Hüllkurven einer Geradenschar	88
3.6.2	Krümmungsradius und Krümmung	95
3.6.3	Ausblick: Traktrix und Kettenlinie	102
4	Ausblick	107
4.1	Anmerkungen zur Axiomatik	107
4.2	Hyperbolische Geometrie: Poincarés Kreismodell	111
4.2.1	Der Areatangens hyperbolicus	112
4.2.2	Der Cosinus hyperbolicus	116
4.2.3	Spiegelung am Kreis	120
4.3	Ausblick	125
5	Anhang	129
5.1	Darstellung der Kegelschnitte aus dreidimensionaler Sicht . . .	129
5.2	Kosmische Geschwindigkeiten und Keplers Radiengesetz . . .	137
5.3	Teilgebiete der Geometrie	147
5.4	Verwendete Literatur	152
6	Übungsaufgaben	155

Chapter 1

Einleitung

"Geometria est archetypus pulchritudinis mundi" (die Geometrie ist das Urbild der Schönheit der Welt)

Johannes Kepler

Ursprünglich steht die Geometrie im Sinne des altgriechischen Wortes $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\eta\varsigma$ für "Erdmaß", "Landvermessung". In ihrer langen Entwicklung hat der Begriff eine beträchtliche Bedeutungserweiterung erfahren. Lange Zeit galt sie als Synonym für Mathematik. Heutzutage ist sie ein Teilgebiet der Mathematik, welches seinerseits in etliche Teilgebiete zerfällt (siehe Anhang).

Schon die Babylonier entdeckten während der Hochblüte ihrer Kultur (um 1800 – 1600 v.Chr.) einige interessante geometrische Gesetzmäßigkeiten. So konnten sie die Länge der Diagonale eines Quadrats ziemlich genau berechnen und kannten auch den Zusammenhang zwischen den Längen der Katheten und der Hypothenuse eines rechwinkeligen Dreiecks, der später "Satz von Pythagoras" genannt wurde.

Wesentliche Impulse, die sie zu einer mathematischen Disziplin im heutigen Sinn gemacht hat, erhält die Geometrie zunächst von den Griechen. So begannen *Pythagoras von Samos* (um 570 - um 496 v.Chr.) und seine Schule um 500 damit, allgemeingültige Sätze zu formulieren und zu beweisen. Dem pythagoräischen Vorbild in Süditalien folgend, gründete Platon (428/427 – 348/347 v.Chr.) um 387 seine Akademie in Athen. Über deren Eingang soll geschrieben gewesen sein:

"Kein der Geometrie Unkundiger möge hier eintreten!"

Das wichtigste wissenschaftliche Dokument seiner Zeit sind die "Elemente" des *Euklid von Alexandria* (ca. 350 - ca. 290 v.Chr.), in denen dieser um

300 das mathematisch-geometrische Wissen seines Kulturkreises systematisch darstellt und versucht, es auf eine exakte Grundlage zu stellen.

Nach dem Niedergang des römischen Reiches folgte in Europa eine lange Periode wissenschaftlicher Stagnation. Im arabischen Raum hingegen wurden die klassischen Werke der Griechen eingehend studiert und durch eigenständige Beiträge bereichert¹. Die Wiederentdeckung des alten Kulturgutes in der Renaissance und deren Verbreitung durch den Buchdruck löste in Europa eine stürmische Weiterentwicklung aus. Die Entdeckung der Zentralperspektive in Florenz im 15. Jahrhundert hatte dabei zweifellos eine starke Triebkraft. Die Entwicklung der analytischen Geometrie durch *René Desartes* (1596 – 1650) und *Pierre Fermat* (1601 – 1665) in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts kann wohl als deren Beginn angesehen werden.

Die Entwicklung der projektiven und darstellenden Geometrie wurde vorwiegend durch französische Mathematiker vorangetrieben. Namhafte Vertreter waren u.a. *Gaspard Monge* (1746–1818), der Begründer der darstellenden Geometrie und Mitgebründer der Eliteschule *École Polytechnique* in Paris, *Lazare Carnot* (1753 – 1823) und *Jean-Victor Poncelet* (1788 – 1867). Alle drei stehen in enger Beziehung zu Napoleons Unternehmungen: *Monge* war Teilnehmer der Ägyptischen Expedition in den Jahren 1798 – 1801, *Carnot* galt als Napoleons "organisateur de la victoire" und *Poncelet* nahm an dessen Russlandfeldzug als Leutnant und Ingenieur teil.

Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurden Vektoren, Matrizen, Determinanten und andere algebraische Hilfsmittel in die analytische Geometrie eingeführt und mit großem Erfolg angewendet. Daran haben sich zahlreiche namhafte Mathematiker beteiligt, z.B. *August Ferdinand Möbius* (1790 – 1868), *Julius Plücker* (1801 – 1868) und *Hermann Grassmann* (1809 – 1877).

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie erfolgt nahezu zeitgleich um das Jahr 1823 durch *Carl Friedrich Gauß* (1777 – 1855) in Deutschland, *János Bolyai* (1802–1860) in Ungarn und *Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski* (1793 – 1856) in Russland. Sie wird sich - in Gestalt der Riemannschen Geometrie - in der Folge als fundamental für *Albert Einsteins* (1879 – 1955) allgemeine Relativitätstheorie erweisen.

¹Die "Elemente" des *Euklid* sind ausschließlich durch Übersetzungen aus dem Arabischen wieder ins Abendland gelangt. Die Übersetzer waren die von einer ungemein großen "Studierleidenschaft" beseelten, weltoffenen Theologen *Adelard von Bath* (um 1075 – 1150/60), *Hermann von Kärnten*, latinisiert *Hermannus Dalmata* (um 1100 – um 1155) und *Gerhard von Cremona* (um 1114 – um 1187).

Eine Systematisierung der Geometrie erfolgt durch *Felix Klein* (1849 – 1925) im Rahmen seines Erlanger Programms. *David Hilbert* (1862 – 1943) greift Euklids Versuch, die Geometrie axiomatisch zu begründen, wieder auf und gibt ihr - nach wesentlichen Vorarbeiten von *Moritz Pasch* (1843 – 1930) - im Jahre 1899 endgültig ihren strengen Aufbau.

Das Ziel dieser Lehrveranstaltung ist es, einen Einblick in die Geometrie zu geben, der als Orientierungshilfe für den Unterricht dienen kann.

Das Hauptthema und Bindeglied der Lehrveranstaltung sind die Kegelschnitte, deren Untersuchung mit *Appolinios von Perge* ² (ca. 260 - ca. 190 v.Chr.) beginnt und die bis ins 18. Jahrhundert eine zentrale Rolle spielen.

"Zu der Bewunderung für diesen herrlichen Mann (Johannes Kepler) gesellt sich noch ein anderes Gefühl der Bewunderung und Ehrfurcht, das aber keinem Menschen gilt, sondern der rätselhaften Natur, in die wir hineingeboren sind. Die Menschen erdachten schon im Altertum die Linien denkbar einfachster Gesetzmäßigkeit. Darunter waren neben der geraden Linie und dem Kreis in erster Linie Ellipse und Hyperbel. Diese letzten Formen sehen wir in der Bahnen der Himmelskörper realisiert - wenigstens mit großer Annäherung.

Es scheint, daß die menschliche Vernunft die Formen erst selbständig konstruieren muß, ehe wir sie in den Dingen nachweisen können. Aus Keplers wunderbarem Lebenswerke erkennen wir es besonders schön, daß aus bloßer Empirie die Erkenntnis nicht erblühen kann, sondern nur aus dem Vergleich von Erdachtem mit dem Beobachteten."

Albert Einstein (1930)

Noch in der Mittelschule der 60-er Jahre des vergangenen Jahrhunderts haben sie im Unterricht einen wichtigen Stellenwert eingenommen. Der "Bourbaki-Schock" ³, welcher - von Frankreich ausgehend - zwischen 1934 bis in die 70-er Jahre des 20. Jahrhunderts die abstrakte Seite der Mathematik in den Vordergrund gestellt hat, hat zu einer Vernachlässigung namentlich der anschaulichen Seite der Geometrie geführt ⁴.

²Ein einschlägiger Text von *Euklid* ist verloren gegangen.

³*Nicolas Bourbaki* ist das Pseudonym eines Autorenkollektivs von vorwiegend französischen Mathematikern, welches - angeregt durch die deutsche formalistische Schule um *David Hilbert* und *Emmy Noether* in Göttingen und *Emil Artin* in Hamburg - u.a. ein vielbändiges Lehrbuch der Mathematik in französischer Sprache, die *Éléments de mathématique*, veröffentlichte.

⁴Im deutschsprachigen Raum ist die Geometrie vermutlich darüber hinaus in Misskredit

"Down with Euclid! Death to triangles!"

(*Jean-Alexandre-Eugène Dieudonné,*

wichtiges Gründungsmitglied des Autorenkollektivs *Nicolas Bourbaki*, 1959)

Es ist jedoch davon auszugehen, dass der Einsatz dynamischer Geometrie-Software - wie von GeoGebra - der Geometrie zu einer Renaissance im Schulunterricht verhelfen wird.

Die Lehrveranstaltung folgt weitgehend der historischen Entwicklung. Als Gliederung bietet sich die Unterteilung in *synthetische* und *analytische Geometrie* an:

"... Da ist die *synthetische Geometrie* die, welche die Figuren als solche ohne Hinzufügen von Formeln studiert, während die *analytische Geometrie* sich konsequent der nach Einführung eines passenden Koordinatensystems hinschreibbaren Formeln bedient."

Felix Klein [8], S. 60

geraten, weil die Vertreter des NS-Regimes versuchten, die formalistische Mathematik - unter dem Begriff "Deutsche Mathematik" - wieder auf als anschaulich begriffene Grundlagen zu stellen. So gründete *Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach* (1886 – 1982) als Herausgeber der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1936 die Zeitschrift "Deutsche Mathematik", der er bis zu deren Einstellung im Jahre 1943 als Schriftleiter vorstand. Er stützte sich dabei u.a. auf die vom Marburger Psychologen *Erich Rudolf Jaensch* (1883 – 1940) - dem damaligen Präsidenten der Deutschen Gesellschaft für Psychologie - vertretene *Eidetik*, der Lehre einer bestimmten seelischen Veranlagung zur Bildung von hauptsächlich bildlichen Vorstellungen (siehe auch *Tietjen, C.H.*: "Raum oder Zahl?" (1936): In [15], 317-318) und *Lindner, H.*: "Ludwig Bieberbach und die "Deutsche Mathematik": In [13], S. 98-105).

Chapter 2

Synthetische Geometrie

2.1 Kegelschnitte

2.1.1 Einstieg

Einstieg anhand § 1 "Ebene Kurven" aus Hilbert u. Cohn-Vossens "Anschauliche Geometrie" [20]

- Konstruktion und Tangenteneigenschaft der Kegelschnitte

- Konfokale Ellipsen / Hyperbeln

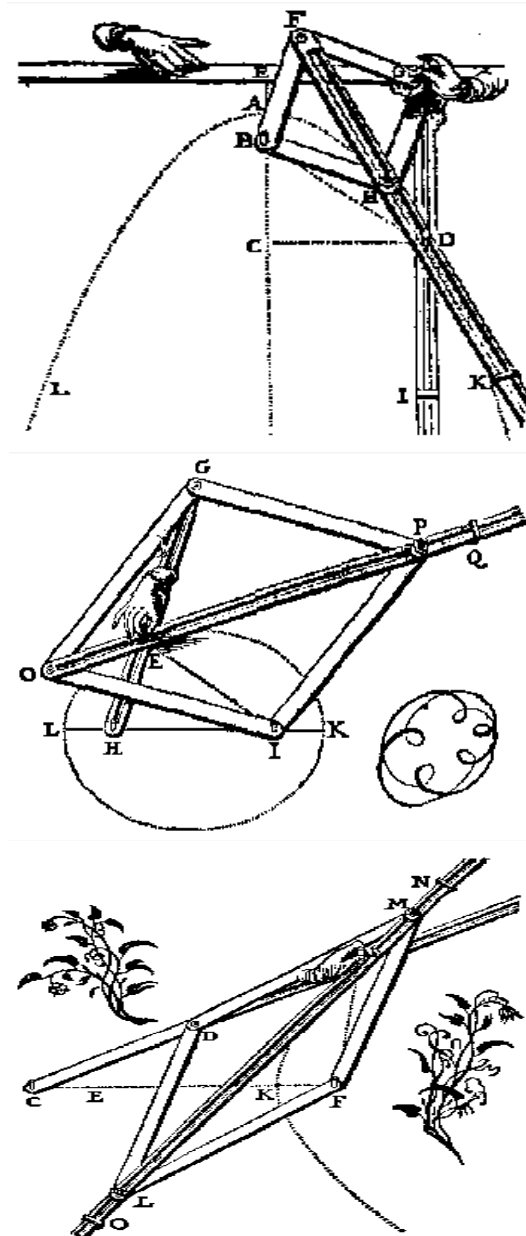


Abb.: Konstruktion nach *Frans van Schooten* (1615 – 1660)

2.1.2 Erarbeitung mit Hilfe der Darstellenden Geometrie

Erarbeitung der Kegelschnitte anhand Wunderlichs "Darstellende Geometrie I" [5]:

III. Kreis und Kugel:

- 16. Normalriß des Kreises
- 17. Ellipsenkonstruktionen

IV. Kegelschnitte:

- 23. Ellipse als Zylinderschnitt
- 24. Ellipse als Kegelschnitt
- 25. Hyperbelschnitt des Drehkegels
- 26. Hyperbelkonstruktionen
- 27. Parabelschnitt des Drehkegels
- 28. Parabelkonstruktionen
- 29. Zusammenfassung

2.1.3 Brennpunkt-Leitlinie-Parametrisierung

Bezeichnungen

F_1 ... Brennpunkt (*focus*)

l ... zugehörige Leitlinie (*directrix*)

L ... Schnittpunkt der Leitlinie mit der Symmetrieachse des Kegelschnitts

$l = F_1 P_1$... *semi-latus rectum* (*perpendikel*): Abstand des Brennpunkts F_1 von einem jener beiden Punkte $P_{1,2}$ des Kegelschnitts, die auf der Geraden durch F_1 parallel zur Leitlinie liegen

$p = LF_1$... *focal parameter*: Abstand des Brennpunkts F_1 von der Leitlinie

S ... der dem Brennpunkt F_1 nächstgelegene Scheitelpunkt des Kegelschnitts

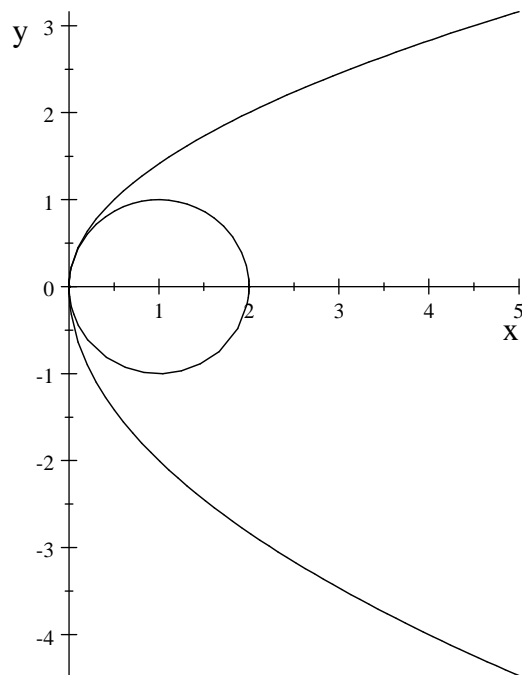
Parabel: Es ist $l = p$ und somit $\frac{l}{p} = 1$. Weiters ist

$$LS = SF_1 = \frac{p}{2} :$$

Im Fall der Parabel sind die Abstände des Scheitelpunkts vom Brennpunkt und von der Leitlinie *gleich*.

Der Radius des Krümmungskreises im Scheitelpunkt S ist

$$l = p .$$

Abbildung 1: Scheitelkrümmungskreis der Parabel ($p = 1$) :

Ellipse: Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke im Thaleskreis von Abbildung 2 gilt

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{e}$$

und somit

$$p = \frac{b^2}{e}.$$

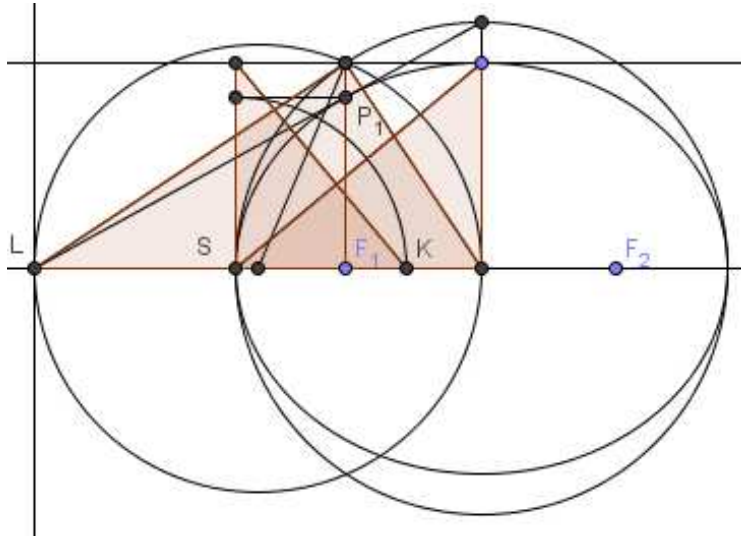


Abb. 2: Abbildung zur Ähnlichkeit von Dreiecken im Fall der Ellipse

Das *semi-latus rectum* $l = F_1P_1 = SK$ ist aufgrund der Beziehung $\frac{l}{b} = \frac{b}{a}$ (siehe wiederum Abbildung 2)

$$l = b \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Also ist der Quotient, nämlich der Anstieg der Tangente an die Ellipse im Punkt P_1 , gleich

$$\frac{l}{p} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{e}} = \frac{e}{a} = \varepsilon < 1.$$

Wegen $b^2 = a^2 - e^2$ und $e = a\varepsilon$ gilt

$$l = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - e^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2) \quad \text{und daher} \quad p = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon}.$$

Weiters sind die Entfernung des Brennpunkts F_1 zum Scheitelpunkt S

$$F_1S = a - a\varepsilon = a(1 - \varepsilon)$$

und die Entfernung des Scheitelpunkts S von der Leitlinie l

$$LS = \frac{a}{\varepsilon} - a = a\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = \frac{a(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} > a(1 - \varepsilon) = SF_1 :$$

Im Fall der Ellipse ist der Abstand des Scheitelpunkts vom Brennpunkt *kleiner* als der von der Leitlinie.

Der Radius des Krümmungskreises im Scheitelpunkt S ist, wie wir in Abschnitt 3.6.2 "Krümmungsradius und Krümmung" oder in Abschnitt 5.1 "Darstellung der Kegelschnitte aus dreidimensionaler Sicht" nachweisen werden,

$$l = \frac{b^2}{a}. \quad (1)$$

Die Ellipse besitzt neben den sogenannten Hauptscheiteln noch Nebenscheitel. Der Radius der Krümmungskreise in den Nebenscheiteln ist - in Analogie zu (1) -

$$R = \frac{a^2}{b}.$$

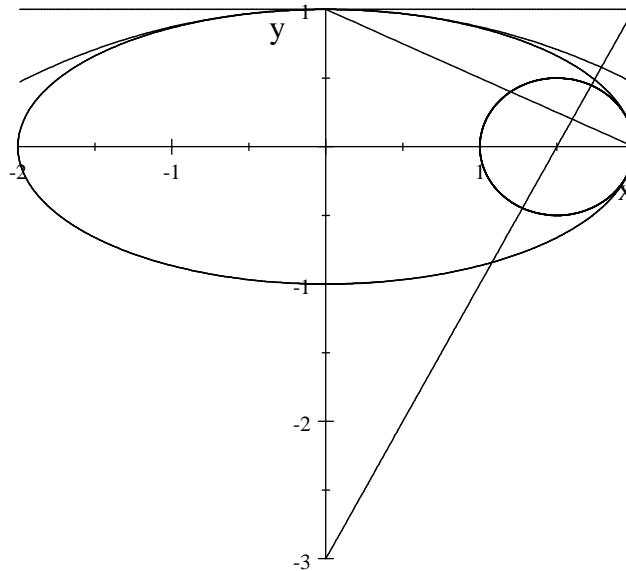
Anmerkung 1: Ersteres entspricht der Konstruktion aufgrund ähnlicher Dreiecke gemäß

$$\frac{l}{b} = \frac{b}{a}$$

und Letzteres

$$\frac{R}{a} = \frac{a}{b}.$$

Abbildung 3: Scheitelkrümmungskreise der Ellipse ($a = 2$, $b = 1$) :



Hyperbel: Wegen

$$\frac{l+a}{e} = \frac{e}{a}$$

und $e^2 = a^2 + b^2$ ist

$$l = \frac{e^2}{a} - a = \frac{a^2 + b^2}{a} - a = \frac{b^2}{a} = a\left(\frac{b}{a}\right)^2 = a(\varepsilon^2 - 1) .$$

Die Entfernung p des Brennpunkts von der zugehörigen Leitlinie ist wegen

$$\frac{l}{p} = \frac{e}{a} = \varepsilon$$

$$LF_1 = p = \frac{l}{\varepsilon} = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon} .$$

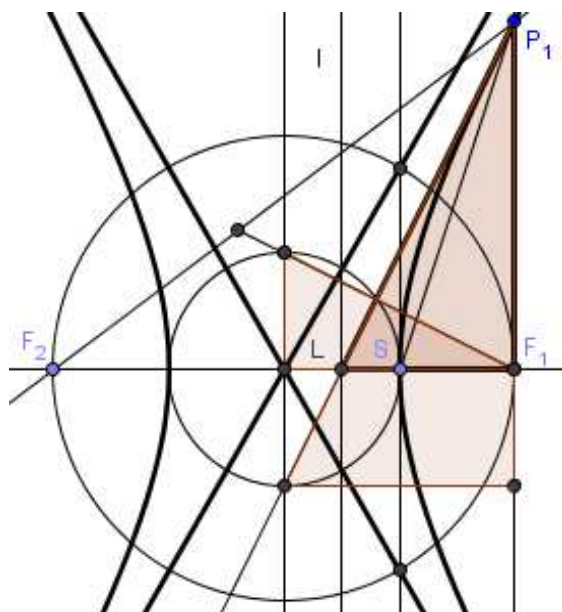


Abb. 4: Abbildung zur Ähnlichkeit von Dreiecken im Fall der Hyperbel

Weiters gelten

$$SF_1 = e - a = a(\varepsilon - 1)$$

und

$$LS = LF_1 - SF_1 = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon} - a(\varepsilon - 1) = \frac{a(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} < a(\varepsilon - 1) = SF_1 :$$

Im Fall der Hyperbel ist der Abstand des Scheitelpunkts vom Brennpunkt *größer* als der von der Leitlinie.

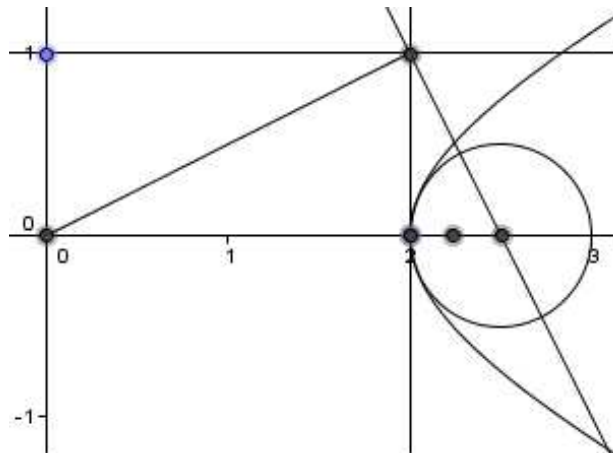
Der Radius des Krümmungskreises im Scheitelpunkt S ist

$$l = \frac{b^2}{a}.$$

Anmerkung 2: Letzteres entspricht der Konstruktion aufgrund ähnlicher Dreiecke gemäß

$$\frac{l}{b} = \frac{b}{a}.$$

Abbildung 5: Scheitelkrümmungskreis der Hyperbel ($a = 2, b = 1$) :



Anmerkung 3: Der Schnitte der Gerade $x = e$ mit der oberen Asymptote liefert

$$\frac{\bar{l}}{e} = \frac{b}{a} \Rightarrow \bar{l} = e \cdot \frac{b}{a}$$

und somit

$$\frac{\bar{l}}{l} = \frac{e \cdot \frac{b}{a}}{\frac{b^2}{a}} = \varepsilon \cdot \frac{a}{b}.$$

2.2 Die Zentralperspektive

"Perspektive ist nichts anderes, als einen Ort durch ein flaches durchsichtiges Glas zu sehen, auf dessen Oberfläche alle Dinge gezeichnet sind, die hinter

diesem Glas sind und die durch Pyramiden zum Punkt des Auges zusammengeführt werden können, und diese Pyramiden schneiden sich mit dem Glas."

Leonardo da Vinci, um 1496

2.2.1 Der Satz von Pappos

Die drei Bücher von Euklid über die sogenannten "Porismen" sind verloren gegangen. Wir kennen die darin behandelten Themen nur indirekt aus späteren Überlieferungen, insbesondere aus dem Werk von *Pappos von Alexandria* (ca. 290 – ca. 350), dem letzten der großen griechischen Geometer.

"... zu Anfang des Peloponnesischen Krieges (431 – 404 v. Chr.) erfand Agatharchos die "Skenographie", die perspektivische¹ Kulissenmalerei, die durch Alkibiades, der sein Haus mit solchen Bildern schmücken ließ, zu großer Mode erhoben wurde." (vgl. [11], S. 802 – 803).



Theaterscherbe aus Tarent, Mitte des 4. Jh. v. Chr.

Zur Vermessung der Höhe von Gebäuden wurde im Mittelalter der *Jakobsstab* verwendet. Vermutlich verwendete diesen auch *Brunellesci*², welcher als Entdecker der Kunst gilt, zentralperspektivische Bilder zu konstruieren, bei

¹Es handelt sich dabei um die sogenannte "Kavalierperspektive" (nach *Bonaventura Francesco Cavalieri*, 1598 – 1647), nicht die Zentralperspektive.

²*Filippo Brunellesci* (1377 – 1446), führender italienischer Architekt und Bildhauer der Frührenaissance. Sein Hauptwerk ist die Kuppel des Domes Santa Maria del Fiore von Florenz.

der Vermessung der zerstörten Stadt Florenz. Beim Einsatz des Jakobsstabs ist offensichtlich die Nutzung der Ähnlichkeit von Dreiecken grundlegend.



Jakobsstab.

Ähnlich verfährt auch *Albrecht Dürer*³, um in seinem Werk "Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen ..." die Anwendung der Perspektive in der Malerei darzustellen.



Albrecht Dürer "Underweysung ..." (1525)

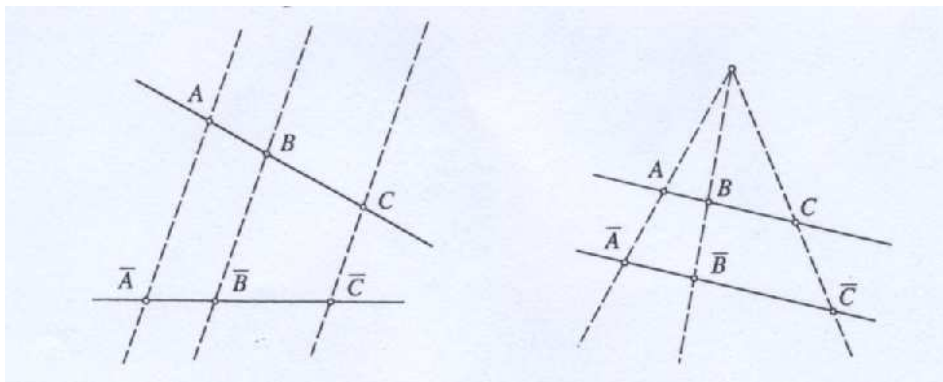
Teilverhältnis von drei Punkten auf einer Geraden

Definition 1: Teilverhältnis von drei Punkten A, B, C auf einer Geraden

$$(ABC) := \frac{(AC)}{(BC)}$$

³ *Albrecht Dürer* (1471 – 1528), deutscher Maler

Eine Projektion von einer Geraden auf eine andere ergibt nur in folgenden beiden Sonderfällen eine teilverhältnistreue Abbildung, d.h. dass gilt $(ABC) = (\bar{A}\bar{B}\bar{C})$:



Eine Zentralprojektion von einer Geraden auf eine dazu nicht parallelen Geraden ist nicht teilverhältnistreu. Es wird sich jedoch zeigen, dass - für vier Punkte auf einer Geraden - das Verhältnis zweier Teilverhältnisse, das sogenannte *Doppelverhältnis* dabei invariant bleibt. Daher ist der Begriff des Doppelverhältnisses grundlegend für eine Zentralprojektion.

Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden ⁴

Definition 2: Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C, D auf einer Geraden:

$$(ABCD) := \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{(AC)}{(BC)}}{\frac{(AD)}{(BD)}}$$

Doppelverhältnis von vier Geraden durch einen Punkt

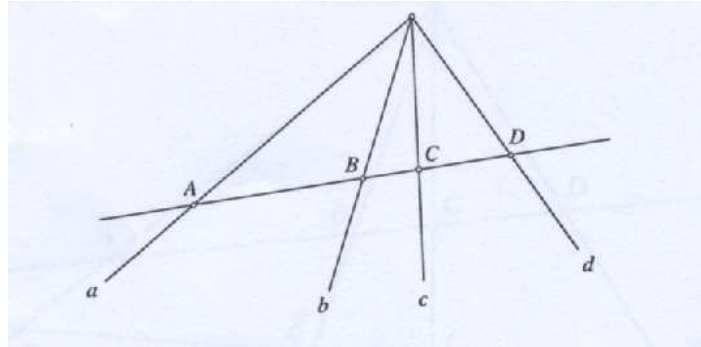
Definition 3: Doppelverhältnis von vier Strahlen a, b, c, d mit gemeinsamen Anfangspunkt:

$$(abcd) := \frac{\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}}{\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}}$$

Der Satz von Pappos ist - zusammen mit dem Satz von Desargues - Grundlage

⁴Der Begriff des Doppelverhältnisses wurde von *August Ferdinand Möbius* (1790 – 1868) eingeführt und diente dem Schweizer Mathematiker *Jakob Steiner* (1796 – 1863) als Fundamentalbegriff der neueren Geometrie.

der modernen projektiven Geometrie. Er besagt, dass die beiden Doppelverhältnisse in der nachstehenden Abbildung identisch sind.

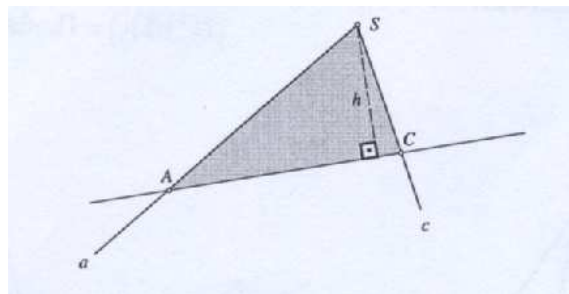


Satz von Pappos: Gemäß den Gegebenheiten der obigen Abbildung gilt

$$(ABCD) = (abcd).$$

Beweis: Dieser beruht auf der Tatsache, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks ACS auf folgende beiden Arten berechnet werden kann:

$$F_{\Delta ACS} = \frac{(AC) \cdot h}{2} = \frac{(SA) \cdot (SC) \cdot \sin(ac)}{2}.$$



Dabei ist die erste Darstellung ganz elementar. Die zweite ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Sinussatz ⁵ (weiter unten).

⁵Der Sinussatz ist beispielsweise Lehrstoff der 6. Klasse AHS.

Gemäß der ersten Flächenformel ergibt sich, zumal man die Faktoren $\frac{h}{2}$ kürzen kann, einerseits

$$\frac{\frac{F_{\triangle ACS}}{F_{\triangle BCS}}}{\frac{F_{\triangle ADS}}{F_{\triangle BDS}}} = \frac{\frac{(AC)}{(BC)}}{\frac{(AD)}{(BD)}} = (ABCD).$$

und gemäß der zweiten Flächenformel ergibt sich, zumal man die vier Faktoren $\frac{(SA)(SC)}{2}$, $\frac{(SB)(SC)}{2}$, $\frac{(SA)(SD)}{2}$ und $\frac{(SB)(SD)}{2}$ kürzen kann, andererseits

$$\frac{\frac{F_{\triangle ACS}}{F_{\triangle BCS}}}{\frac{F_{\triangle ADS}}{F_{\triangle BDS}}} = \frac{\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}}{\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}} = (abcd). \quad \square$$

Aus dem Satz von Pappos folgt unmittelbar der nachstehende

Satz zur Zentralprojektion: Die Zentralprojektion einer Geraden g auf eine Gerade \bar{g} ist *doppelverhältnistreue*.

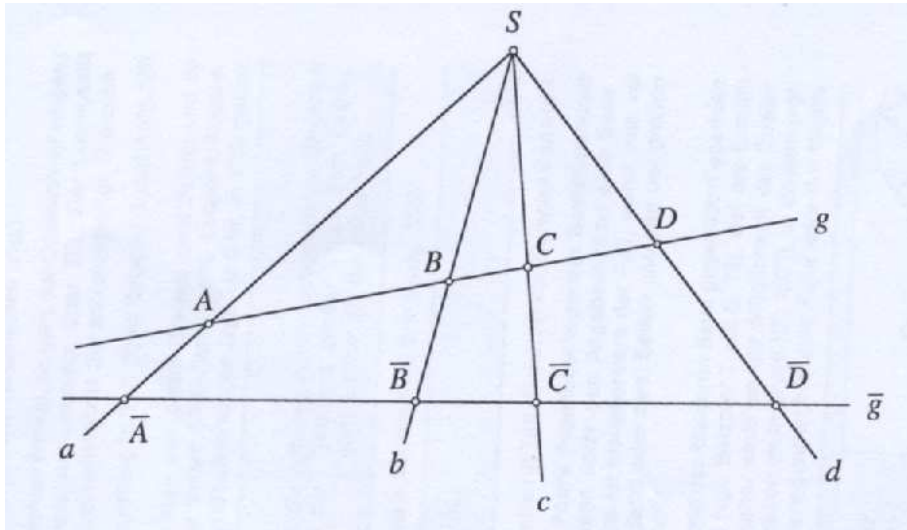


Abbildung zum Satz zur Zentralprojektion

Beweis: Es gilt $(ABCD) = (abcd) = (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})$. \square

Sinussatz: Seien ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c , den zugehörigen Winkeln α, β, γ und dem Umkreisradius R , dann gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R. \quad (1)$$

Anmerkung 1: Eine solcher Kreisbogen wird bisweilen *Fasskreisbogen* genannt.

Anmerkung 2: Geht man von ein- und demselben Kreisbogen aus, so ist die Summe eines Peripheriewinkels über und eines Peripheriewinkels unter diesem Kreisbogen gleich π .

Anmerkung 3: Der Satz von Thales ist der Spezialfall des Peripheriewinkelsatzes für den Fall, dass der Kreisbogen ein Halbkreis ist.

Der Peripheriewinkelsatz und Anmerkung 2 sind eine unmittelbare Konsequenz des Zentriwinkelsatzes.

Zentriwinkelsatz: Der *Zentriwinkel* (*Mittelpunktswinkel*) ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Peripheriewinkel.

Anmerkung 4 (zum Satz zur Zentralprojektion): Der tiefere Grund für die Gültigkeit dieses Satzes liegt darin, dass alle Schnittpunkte von zwei Geraden, durch je zwei zugehörige Punktepaare auf ein- und derselben Geraden liegen, d.h. *kollinear* sind: nämlich die Schnittpunkte $A\bar{B} \cap \bar{A}B$, $A\bar{C} \cap \bar{A}C$, $A\bar{D} \cap \bar{A}D$, $B\bar{C} \cap \bar{B}C$, $B\bar{D} \cap \bar{B}D$ und $C\bar{D} \cap \bar{C}D$.

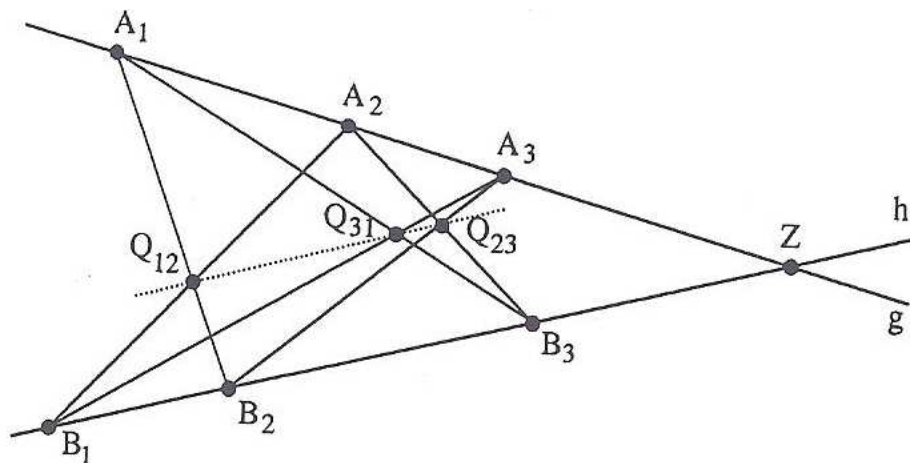
Diese Gerade geht durch den Schnittpunkt $T = g \cap \bar{g}$ der Geraden g und \bar{g} . Als zweiter Punkt eignet sich am Besten der Schnittpunkt der beiden Geraden $B\bar{C}$ und $\bar{B}C$, wobei SBC und $S\bar{C}\bar{B}$ rechte Winkel sind.

Die folgende Verallgemeinerung von Anmerkung 4 ist der Satz von Pappos-Pascal⁶.

Satz von Pappos-Pascal: Liegen die Ecken eines Sechsecks $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ abwechselnd auf zwei Geraden g und h , dann sind die Schnittpunkte gegenüberliegender Seitenpaare kollinear. (Die Sprechweise "gegenüberliegende" Sei-

⁶Blaise Pascal (1623 – 1662), französischer Mathematiker

tenpaare ist einem regelmäßigen Sechseck $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ zu entnehmen.)



2.2.2 Ausblick: Pappos und die harmonische Teilung

Man gehe von folgender Abbildung aus, wobei die Geraden CS und AK parallel sind.

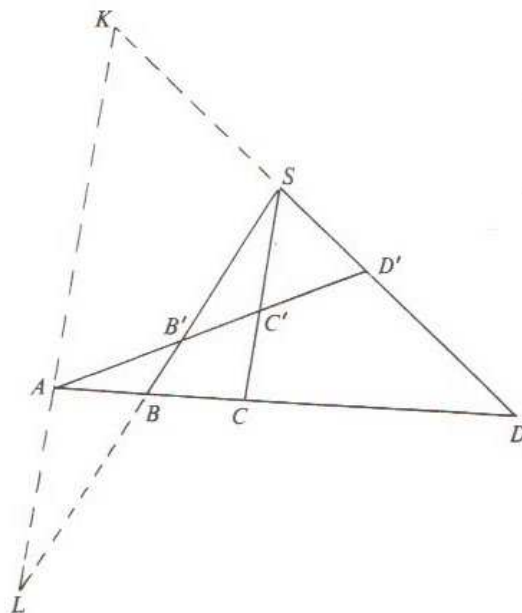


Abb. 1: Zur Erhaltung des Doppelverhältnisses

Da die Dreiecke $\triangle BAL$ und $\triangle BCS$ ähnlich sind, gilt

$$\frac{(AB)}{(AL)} = \frac{(BC)}{(CS)}$$

oder, gleichbedeutend,

$$\frac{(AB)}{(BC)} = \frac{(AL)}{(CS)} . \quad (1)$$

Wegen $CS \parallel AK$ sind auch die Dreiecke $\triangle DAK$ und $\triangle DCS$ ähnlich und es gilt überdies

$$\frac{(CD)}{(AD)} = \frac{(CS)}{(AK)} . \quad (2)$$

Multipliziert man jeweils die linken bzw. rechten Seiten von (1) und (2), so erhält man

$$\frac{(AB) \cdot (CD)}{(BC) \cdot (AD)} = \frac{(AL)}{(CS)} \cdot \frac{(CS)}{(AK)} = \frac{(AL)}{(AK)} .$$

Analog ergibt sich

$$\frac{(AB') \cdot (C'D')}{(B'C') \cdot (AD')} = \frac{(AL)}{(AK)} .$$

Zusammenfassend gilt also

$$\frac{(AB') \cdot (C'D')}{(B'C') \cdot (AD')} = \frac{(AB) \cdot (CD)}{(BC) \cdot (AD)} (= \frac{(AL)}{(AK)}) .$$

Anmerkung 1: Schreibt man die Teilungspunkte B und C der Strecke AD in umgekehrter Reihenfolge an, so erhält man mit

$$\frac{(AC) \cdot (BD)}{(BC) \cdot (AD)} = \frac{(AC)}{(BC)} : \frac{(AD)}{(BD)} =: (ABCD)$$

die in Abschnitt 2.2.1 benutzte Definition des Doppelverhältnisses $(ABCD)$.

Demnach ist die oben erhaltene Größe das Doppelverhältnis

$$\frac{(AB) \cdot (CD)}{(BC) \cdot (AD)} = (ACBD)$$

und es gilt die Beziehung

$$(ACBD) - (ABCD) = 1 ,$$

wie man leicht nachrechnet, indem man o.B.d.A. die Punkte A, B, C, D durch die Werte $a < b < c < d$ auf \mathbb{R} identifiziert und deren Abstände wie üblich berechnet: So ist beispielsweise $(AD) = d - a$.

Anmerkung 2: Gilt $(AL) = (AK)$, dann ist $\frac{(AL)}{(AK)} = 1$ und das Doppelverhältnis $(ACBD)$ ist demnach

$$(ACBD) = \frac{(AB) \cdot (CD)}{(BC) \cdot (AD)} = 1. \quad (0)$$

Sind nun $a = (AD)$, $c = (CD)$ und $h = (BD)$, dann sind

$$(AB) = (AD) - (BD) = a - h \quad \text{und} \quad (BC) = (BD) - (CD) = a - c$$

und das Doppelverhältnis $(ACBD)$ ist daher

$$(ACBD) = \frac{(a - h) \cdot c}{(h - c) \cdot a} = 1. \quad (0')$$

Die Lösung von $(0')$ ist das harmonische Mittel

$$h = \frac{2ac}{a + c} = \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})} \quad \text{von } a \text{ und } c.$$

Gilt (0) , so sagt man, dass die Strecke AB durch die Teilungspunkte B und C harmonisch geteilt wird.

Abschließend seien die Konstruktion der harmonischen Teilung zusammengefasst und ein konstruktiver Vergleich aller drei klassischen Mittel vorgenommen.

Die Konstruktion der harmonischen Teilung nach Pappos

Man gehe von Abbildung 2 aus, wobei man die Strecke AD und den Teilungspunkt C als gegeben betrachte. Die Strecke CS sei parallel zu AK und zwar derart, dass die Dreiecke $\triangle DCS$ und $\triangle DAK$ ähnlich sind. Weiters habe die Strecke AL , welche die Verlängerung von KA ist, die gleiche Länge wie AK , sodass $\frac{(AL)}{(AK)} = 1$ ist! Dann ist der Schnittpunkt B der Strecken SL und AD der zweite Teilungspunkt von AD , welcher zusammen mit C die Strecke AD harmonisch teilt.

(Dass die Strecken AK und AD einen rechten Winkel einschließen, ist bequem, jedoch nicht wesentlich.)

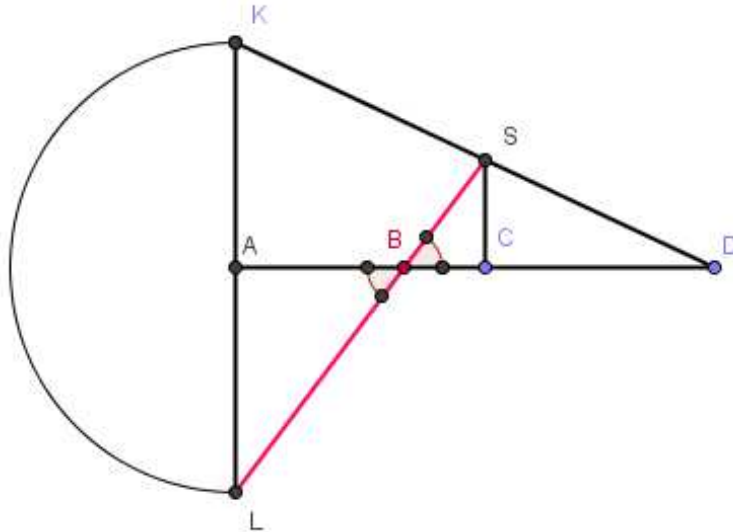


Abb. 2: Konstruktion des harmonischen Mittels

Harmonisches, geometrisches und arithmetisches Mittel ⁷

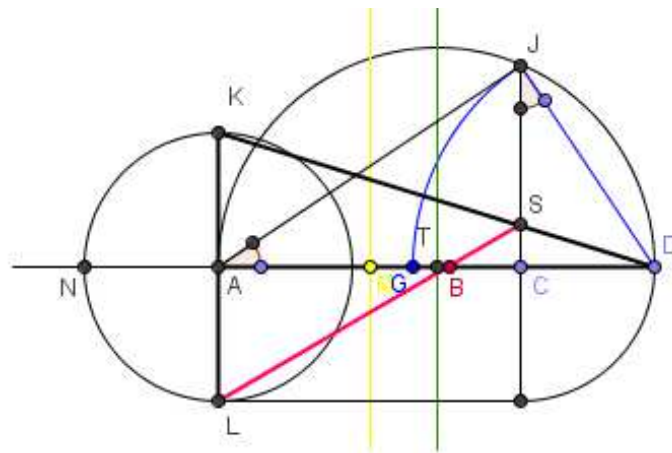


Abb. 3: Vergleich der drei klassischen Mittel

zeigt - neben der Konstruktion des harmonischen Mittels - auch die des geometrischen und des arithmetischen Mittels.

⁷Pappos hat neben den bereits vor den Pythagoreern untersuchten drei klassischen Mitteln eine Reihe weiterer Mittelwert vorgeschlagen (siehe [42], Abschnitt 2.1.2 "Pappos' Mittelwerte", S. 12-14).

Es seien, wie oben, $a = (AD)$, $c = (CD)$. Ferner seien die Bezeichnungen zur Konstruktion des harmonischen Mittels $h = (BD)$ wie in der obigen Abbildung. Um auch das arithmetische Mittel $\frac{a+c}{2}$ konstruieren zu können, wählen wir zudem $(AN) = (AL) = (CD) = c$.

◦ **Geometrisches Mittel:** Zur Konstruktion des geometrischen Mittels $\sqrt{a \cdot c}$ errichten wir einen Thaleskreis über der Strecke AD . Dessen Mittelpunkt T ist der Schnittpunkt der Streckensymmetrale von AD mit der Strecke AD . Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle JDA$ und $\triangle DCJ$ gilt

$$\frac{(JD)}{(AD)} = \frac{(CD)}{(JD)} \quad \text{oder, gleichbedeutend,} \quad (JD)^2 = (AD) \cdot (CD)$$

und somit $(GD) = (JD) = \sqrt{(AD) \cdot (CD)} = \sqrt{a \cdot c}$.

◦ **Arithmetisches Mittel:** Sei M der Schnittpunkt der Streckensymmetrale von ND mit der Strecke AD . Dann ist

$$(MD) = \frac{(DN)}{2} = \frac{(DA) + (AN)}{2} = \frac{a + c}{2}.$$

Wie man Abbildung 3 entnimmt, gilt (wegen $c < a$) die Ungleichungskette

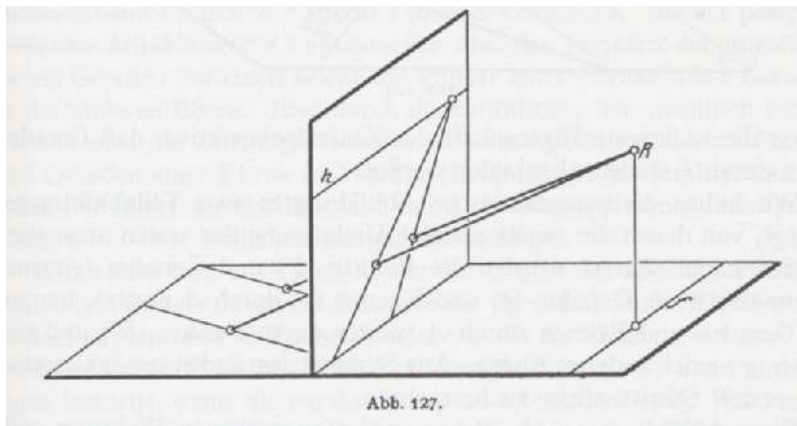
$$c < \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})} < \sqrt{a \cdot c} < \frac{a + c}{2} < a.$$

2.2.3 Übungsaufgabe zur Zentralperspektive

Ehe wir uns der Übungsaufgabe widmen, sei noch eine theoretische Betrachtung zur Zentralperspektive aus [20], S. 99-100 wiedergegeben.

”Wenn wir auf einer vertikalen Tafel das Bild einer ebenen Landschaft zeichnen (Abb. 127), so erscheint das Bild der Ebene von einer Geraden h , dem Horizont, begrenzt, und zwei in der Ebene verlaufende parallele Geraden, die nicht außerdem noch der Bildtafel parallel sind, erscheinen im Bild als zwei Geraden, die sich auf dem Horizont treffen. Ihr Treffpunkt wird in der

Theorie des Zeichnens der Fluchtpunkt der Parallelen genannt.



Bei der Abbildung durch Zentralperspektive bleiben also die Parallelen gewöhnlich nicht parallel. Ferner sehen wir, daß diese Abbildung nicht umkehrbar eindeutig ist. In der Bildtafel wird durch die Punkte des Horizonts kein Punkt der Ebene dargestellt. Umgekehrt gibt es in der Ebene Punkte, die nicht abgebildet werden. Es sind das die Punkte der Geraden f (Abb. 127), die senkrecht unter dem Betrachter R der Bildtafel parallel läuft.”

Übungsaufgabe zur Zentralperspektive⁸: Seien

f ... die Höhe des Augpunkts (= Höhe des Fixpunkts)
 d ... die Entfernung des Augpunkts von der Bildebene.

(a) Bilden Sie die Parabel mit der Gleichung

$$y(x) = x^2 \text{ und } z = 0$$

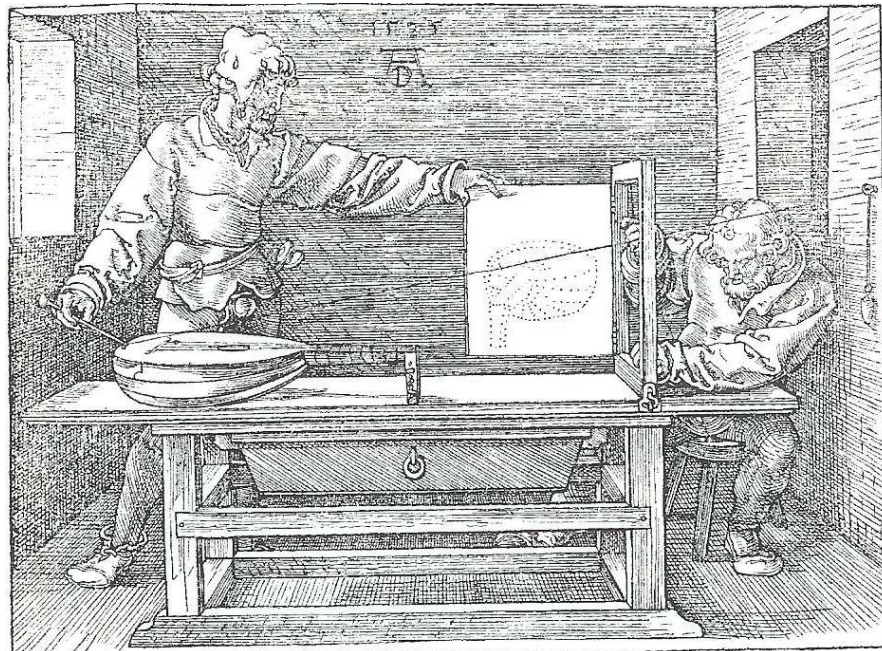
vom Augpunkt $(0, -d, f)$ aus auf die Bildebene $y = 0$ ab.⁹

(b) Begründen Sie, dass das zentralperspektivische Bild einer Parabel stets ein Kegelschnitt ist und (c) bestimmen Sie, für welche Winkel $\varphi \in [0, \pi)$ zwischen Objekt- und Bildebene dieses Bild (1) eine Parabel, (2) eine Ellipse

⁸im Sinn von Dürers Bild mit der Laute

⁹Siehe Artikel [52] von *Jean-Pierre Le Goff*, Bild auf Seite 24

(im Spezialfall unter Umständen ein Kreis) bzw. (3) eine Hyperbel ist.



Albrecht Dürer "Unterweysung ..." (1525)

Lösung: (a)

x	...	x -Koordinate des Basispunkts der Parabel
$y(x) = x^2$...	y -Koordinate des Basispunkts der Parabel
h	...	y -Koordinate des Bildpunkts der Parabel
ξ	...	x -Koordinate des Bildpunkts der Parabel

Transformation der y -Koordinate: Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt

$$\frac{h}{y} = \frac{f}{d+y}$$

bzw.

$$h = h(y) = \frac{y \cdot f}{d+y} = \frac{f}{1 + \frac{d}{y}}. \quad (1)$$

Transformation der x -Koordinate: Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt

$$\frac{h}{x-\xi} = \frac{f}{x}$$

bzw. gleichbedeutend, $x - \xi = \frac{h}{f} \cdot x$ oder

$$\xi = x \cdot \left(1 - \frac{h}{f}\right). \quad (2)$$

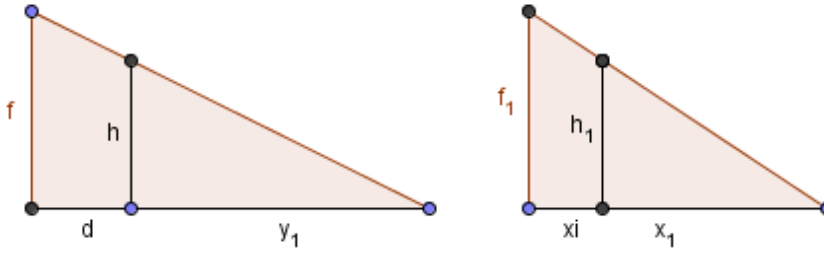


Abb. zu den den Transformationen von y - und x -Koordinate

Aufgrund von (1) gilt für die y -Koordinate des Bildpunkts des Basispunkts (x, x^2)

$$h(x) = \frac{f}{1 + \frac{d}{x^2}}.$$

Die x -Koordinate des Bildpunkts ist somit wegen (2)

$$\xi = x \cdot \left(1 - \frac{h(x)}{f}\right) = x \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{d}{x^2}}\right).$$

Mit

$$y = \frac{f}{1 + \frac{d}{x^2}} \Leftrightarrow \frac{d}{x^2} = \frac{f}{y} - 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{d}{\frac{f}{y} - 1}$$

gilt somit

$$\xi = x \cdot \left(1 - \frac{h(x)}{f}\right) = \sqrt{d} \frac{1 - \frac{y}{f}}{\sqrt{\frac{f}{y} - 1}} = \frac{\sqrt{d}}{f} \frac{\sqrt{y}(f - y)}{\sqrt{f - y}} = \frac{\sqrt{d}}{f} \sqrt{y(f - y)}.$$

Da $\xi = \sqrt{y(f - y)}$ die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $(0, \frac{f}{2})$ und Radius $r = \frac{f}{2}$ ist, ist

$$\xi = \frac{\sqrt{d}}{f} \sqrt{y(f - y)}$$

die Gleichung einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0, \frac{f}{2})$ und den Halbachsen $a = \frac{f}{2}$ und, wegen $\sqrt{y(f - y)} \leq \frac{f}{2}$,

$$b = \frac{\sqrt{d}}{2}.$$

Anmerkung: Für den Spezialfall $d = f = 1$ handelt es sich um einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, \frac{1}{2})$ und dem Radius $r = \frac{1}{2}$.

(b) ...

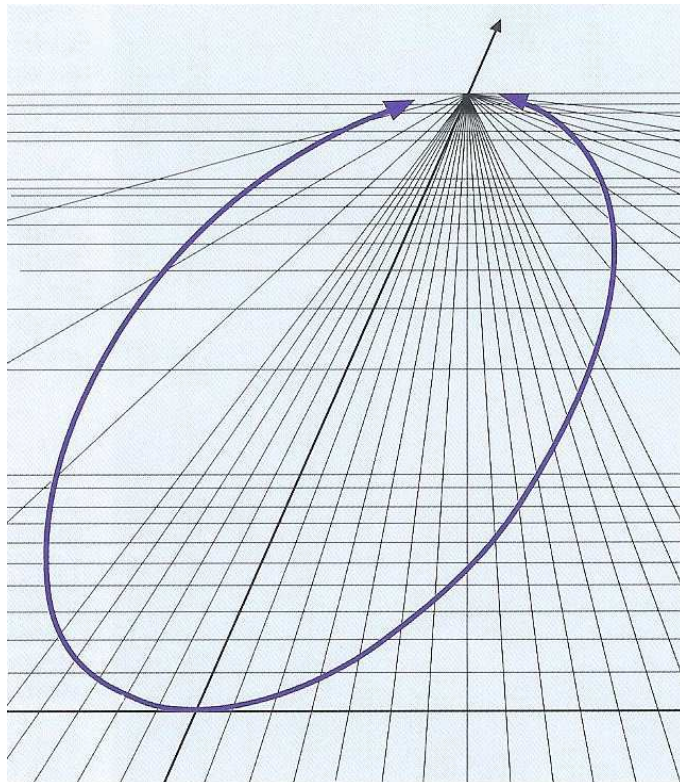
(c) Das zentralperspektivische Bild einer Parabel ist stets ein Kegelschnitt: Das Bild einer Parabel ist genau dann

(1) eine Parabel, wenn die Bildebene parallel zur Objektebene ist, bzw. gleichbedeutend, wenn der Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ zwischen der Objektebene und Bildebene $\varphi = 0$ ist,

(2) eine Ellipse (im Spezialfall ein Kreis), wenn dieser Winkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ist, bzw.

(3) eine Hyperbel, wenn dieser Winkel $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ist.

Abbildung und nachstehendes Zitat sind aus [52]: "Elemente im Unendlichen wurden lange Zeit mit Misstrauen betrachtet. Heute weiß man, dass eine Parabel, also eine offene Kurve, in der Perspektive zu einer Ellipse, also einer geschlossenen Kurve, werden kann."



2.2.4 Der Satz von Desargues

Der Satz von *Desargues*¹⁰ ist das erste mathematische Resultat zum Thema Zentralperspektive aus der Neuzeit. Er knüpft an den Erkenntnissen von *Pappos von Alexandria* an und ist grundlegend für die weitere Entwicklung der projektiven Geometrie.

Satz von Desargues ("Zwei-Dreiecke"-Satz): Sind zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch zu einem Punkt O , so sind sie auch perspektivisch zu einer Geraden (der sogenannten Achse) s , und umgekehrt.

Beweis: Man gehe von den in nachstehender Figur dargebotenen Bezeichnungen aus.

(a) Seien die zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch zu einem Punkt O .

Falls die Punkte B, B', A'', C'' zusammenfallen, ist s durch die beiden Punkte B und B'' gegeben und daher nichts zu zeigen.

Dementsprechend setzen wir voraus, dass entsprechende Punkte A, A', B, B' und C, C' verschieden sind. Deshalb lässt sich O jeweils als Linearkombination der zugehörigen Punktepaare darstellen, d.h. es gilt für geeignete $\lambda_{(A,A')}, \lambda_{(B,B')}, \lambda_{(C,C')} \in \mathbb{R}$

$$O = (1 - \lambda_{(A,A')})A + \lambda_{(A,A')}A' = (1 - \lambda_{(B,B')})B + \lambda_{(B,B')}B' = (1 - \lambda_{(C,C')})C + \lambda_{(C,C')}C'$$

und somit

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_{(A,A')})A - (1 - \lambda_{(B,B')})B &= \lambda_{(B,B')}B' - \lambda_{(A,A')}A' = \kappa_{C''} \cdot C'' \\ (1 - \lambda_{(B,B')})B - (1 - \lambda_{(C,C')})C &= \lambda_{(C,C')}C' - \lambda_{(B,B')}B' = \kappa_{A''} \cdot A'' \\ (1 - \lambda_{(C,C')})C - (1 - \lambda_{(A,A')})A &= \lambda_{(A,A')}A' - \lambda_{(C,C')}C' = \kappa_{B''} \cdot B'', \end{aligned}$$

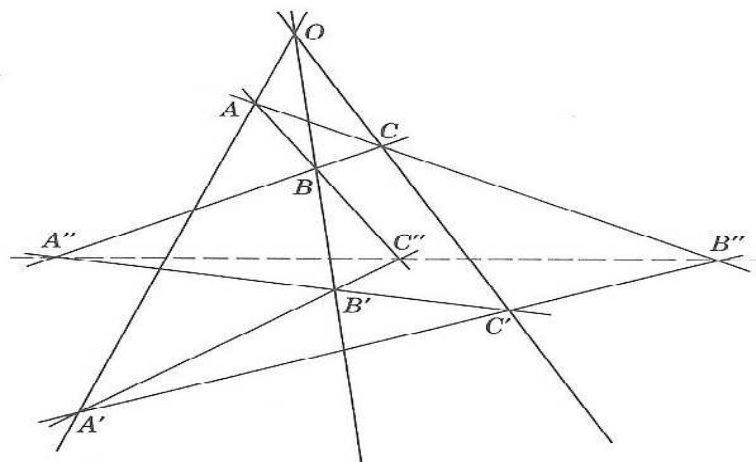
wobei die erste Gleichung ein spezifisches Vielfaches des Schnittpunkts C'' der Geraden durch A und B bzw. A' und B' liefert, die zweite Gleichung ein Vielfaches des Schnittpunkts A'' und die dritte ein Vielfaches des Schnittpunkts B'' liefert. (Wegen $A \neq A', B \neq B'$ und $C \neq C'$ ist das obige Gleichungssystem für $\lambda_{(A,A')}, \lambda_{(B,B')}$ und $\lambda_{(C,C')}$ eindeutig lösbar.) Berücksichtigt man, dass die Summe der drei Gleichungen - von links gelesen - gleich dem $\mathbf{0}$ -Vektor ist und somit

$$\kappa_{C''} \cdot C'' + \kappa_{A''} \cdot A'' + \kappa_{B''} \cdot B'' = \mathbf{0} \quad (1)$$

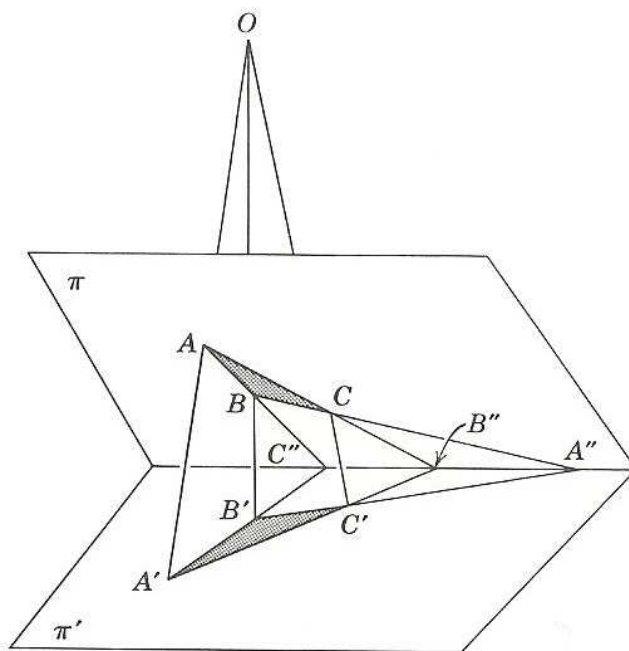
¹⁰ *Gérard Desargues* (1591 – 1661), französischer Architekt und Mathematiker

gilt, ist in der Tat gezeigt, dass die drei Schnittpunkte A'', B'' und C'' auf einer Geraden s liegen.

(b) Der Beweis der Umkehrung erfolgt im Wesentlichen durch Umkehrung der einzelnen Beweisschritte.



Mithilfe der so konstruierten Achse s ist die dreidimensionale Einbettung der zugehörigen Zentralprojektion möglich:



Anmerkung (ohne Beweis): Für die Faktoren in Gleichung (1) im Beweis des Satzes von Desargues gelten

$$\kappa_{A''} = \frac{B' - C'}{A'' - C'} \cdot \frac{B - O}{B - A'} = \frac{(B'C')(BO)}{(A''C')(BB')}, \quad \kappa_{B''} = \frac{(C'A')(CO)}{(B''A')(CC')}, \quad \kappa_{C''} = \frac{(A'B')(AO)}{(C''B')(AA')}.$$

2.2.5 Ausblick: Falsche Perspektive

Titelblatt von *William Hogarth* (1697 – 1764) zu *Joshua Kirbys* ”Dr. Brook Taylor’s Perspective Made Easy” (1754)



”Who ever makes a Design without knowledge of Perspective will be liable to such Absurdities as are shown in this Frontispiece.”¹¹

¹¹ *Joshua Kirby* war der Zeichenlehrer des Prince of Wales, dem späteren König Georg III. von England.

Chapter 3

Analytische Geometrie

3.1 Ausgewählte Texte aus Descartes' Geometrie

Ausgewählte Texte aus Descartes' Geometrie [10]

- Erstes Buch: Geometrische Darstellung der Lösungen der quadratischen Gleichung, S. 2 und 6

- Zweites Buch: Konstruktion von Tangenten: Descartes' Kreismethode
Siehe auch [53], S. 69 - 75

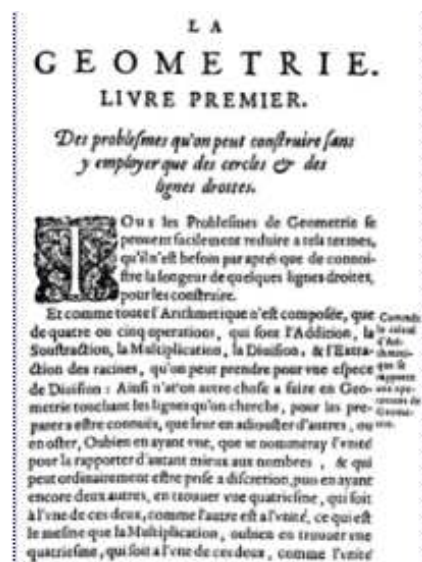
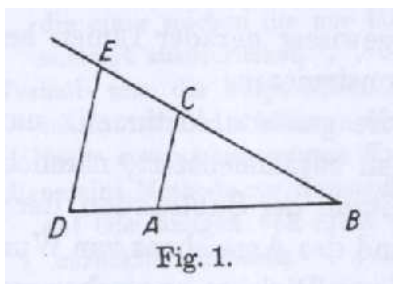


Abb.: Seite aus Descartes' Geometrie (1637)

”Die analytische Geometrie ist ... nichts anderes als die Kunst, Gesetze und Gestalt einer Sache zu finden, ohne hinzusehen: die Gleichung des Kreises, der Ellipse, der Parabel, ehe diese da sind, denn sie folgen ganz von selbst aus der Gleichung, sie müssen folgen, logisch-mathematischen Gehorsam leisten.”

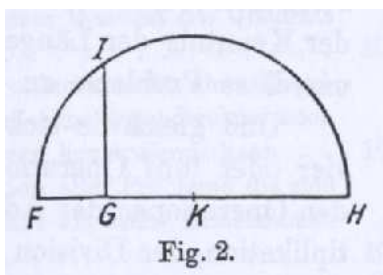
Egon Friedell, Kulturgeschichte der Neuzeit [11], S. 497

Erstes Buch: Ähnlichkeit von Dreiecken und geometrische Lösung der Quadratischen Gleichung



BA ... Einheitsstrecke

$$BE : BC = BD : BA \Leftrightarrow BE = BA \cdot BE = BC \cdot BD.$$



FG ... Einheitsstrecke

$$GI : FG = GH : GI \Leftrightarrow GI^2 = FG \cdot GH = GH$$

und somit $GI = \sqrt{GH}$.

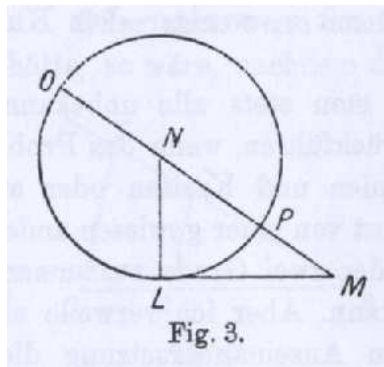
Lösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 = az + b^2 \Leftrightarrow z^2 - az - b^2 = 0$$

Nach der "kleinen" Vietaschen Formel gilt gemäß

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.$$



$LM \dots b$

$NO = NL = NP \dots \frac{a}{2}$

$z_1 \dots MO$

$-z_2 \dots MP$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Probe: Mithin gilt wegen $z_1 + z_2 = a$ und

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}\right) \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}\right) \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2\right) = -b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2) &= z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \cdot z_2 \\ &= z^2 - az - b^2. \end{aligned}$$

Daher ist $z = z_1$ eine Lösung.

Anmerkung: Dass Descartes die Lösung $z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b^2}$ nicht berücksichtigt hat, liegt wohl daran, dass er negative Größen nicht betrachtet.

Zweites Buch: Descartes' Kreismethode: Gegeben seien eine geeignete Kurve \mathcal{C} im ersten Quadranten und ein Punkt $P \in \mathcal{C}$. Um die Tangente t im Punkt P an \mathcal{C} zu legen, wählen wir nach *Descartes* einen weiteren Punkt $M = (h, 0)$ auf der Abszisse und legen einen Kreis \mathcal{K}_M mit Mittelpunkt M durch den Punkt P und verschieben M auf der Abszisse soweit, bis \mathcal{K}_M und \mathcal{C} nur einen Punkt, nämlich P , gemeinsam haben. Die zugehörige Position von M sei $M_0 = (h_0, 0)$. Die Tangente t ist schließlich die Normale zur Strecke M_0P .

Wir illustrieren *Descartes'* Vorgangsweise am Beispiel der Konstruktion der Tangente an die Parabel

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

im Punkt $P = (\frac{p}{2}, p)$: Sei $h > \frac{p}{2}$, dann besitzt ein Kreis mit Mittelpunkt $M = (h, 0)$, welcher durch den Punkt P geht, den Radius

$$r^2 = p^2 + (h - p/2)^2 = h^2 - p(h - \frac{5}{4}p).$$

Für die Kreisgleichung gilt im Hinblick auf (1)

$$\begin{aligned} 0 &= (x - h)^2 + y^2 - r^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2xh + p(h - \frac{5}{4}p) \\ &= x^2 + 2px - 2hx + p(h - \frac{5}{4}p) \\ &= x^2 + 2(p - h)x + p(h - \frac{5}{4}p) \\ &= (x - \frac{p}{2})(x - \frac{p}{2} - 2(h - \frac{3}{2}p)). \end{aligned}$$

Letzteres gilt, weil die Determinante der quadratischen Gleichung

$$D = (p - h)^2 - p(h - \frac{5}{4}p) = (\frac{3}{2}p - h)^2$$

ist und ihre Lösungen somit

$$x_{1,2} = h - p \pm (\frac{3}{2}p - h) = \frac{p}{2} + \begin{cases} 0 \\ 2(h - \frac{3}{2}p) \end{cases}$$

3.2. TANGENTENKONSTRUKTION FÜR DIE KEGELSCHNITTE NACH FERMAT 41

sind. Die beiden Lösungen stimmen daher genau dann überein, wenn $h = h_0 := \frac{3}{2}p$ bzw. $h_0 - \frac{p}{2} = p$ ist. Der Anstieg der Normalen der Tangente t in P ist demgemäß -1 und der Anstieg der Tangente $\varepsilon = 1$, wie es sein soll.

Die Tangentengleichung lautet daher

$$y = p + \left(x - \frac{p}{2}\right) \cdot 1 = x + \frac{p}{2} .$$

3.2 Tangentenkonstruktion für die Kegelschnitte nach Fermat

*Fermat*¹ hat in seiner Studie "Methodus ad disquirendam maximam et minimam" aus dem Jahre 1629 unter anderem auch die Tangentenkonstruktion behandelt. Die nachstehende Vorgangsweise zur Konstruktion einer Tangente an die Ellipse \mathcal{E} mit der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

ist durch einen der beiden von Fermat dabei beschrittenen Wege - welcher in der angelsächsischen Literatur unter "double-root idea" bekannt ist - inspiriert:

Um die Tangente im Punkt $P_0 = (-x_0, y_0) = (-x_0, b\sqrt{1 - (\frac{x_0}{a})^2})$, $x_0 \in [0, a)$, der Ellipse zu errichten,

(a) errichten wir eine Gerade g durch P_0 mit beliebigem Anstieg $k > 0$ und

(b) bringen diese mit der Ellipse \mathcal{E} zum Schnitt. (Auf diese Weise erhält man zunächst zwei Lösungen, nämlich P_0 und einen weiteren Punkt $P_1 \in \mathcal{E}$.)

(c) Schließlich wählen wir den Anstieg k so, dass die beiden Punkte P_0 und P_1 zusammenfallen.

(a) Die Gleichung der Geraden g durch P_0 mit Anstieg k ist offensichtlich

$$y = k(x + x_0) + y_0 .$$

(b) Bringt man g mit der Ellipse \mathcal{E} zum Schnitt, so erhält man

$$\left(\frac{k}{b}(x + x_0) + \frac{y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 = 0 ,$$

¹ *Pierre de Fermat* (1601 – 1665), französischer Mathematiker

bzw., im Hinblick auf $(\frac{y_0}{b})^2 = 1 - (\frac{x_0}{a})^2$ und $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x + x_0 - 2x_0)$,

$$(\frac{k}{b})^2 \cdot (x + x_0)^2 + 2\frac{k}{b} \cdot \frac{y_0}{b}(x + x_0) + \frac{(x + x_0)(x + x_0 - 2x_0)}{a^2} = 0 ,$$

beziehungsweise

$$(x + x_0) \cdot [(\frac{k}{b})^2 + \frac{1}{a^2}] \cdot (x + x_0) + 2(k \cdot \frac{y_0}{b^2} - \frac{x_0}{a^2}) = 0 .$$

(c) Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung fallen daher genau dann zusammen, wenn der Anstieg

$$k = (\frac{b}{a})^2 \cdot \frac{x_0}{y_0} = \frac{bx_0}{a^2 \sqrt{1 - (\frac{x_0}{a})^2}}$$

ist. (Dann gilt $x = -x_0$ und somit tatsächlich $P_1 = P_0$.)

Die Gleichung der Tangente ist demnach wegen (1)

$$\begin{aligned} y &= (\frac{b}{a})^2 \cdot \frac{x_0}{y_0}(x + x_0) + y_0 = (\frac{b}{a})^2 \cdot \frac{x_0}{y_0}(x + x_0 + (\frac{a}{b})^2 \frac{y_0^2}{x_0}) \\ &= (\frac{b}{a})^2 \cdot \frac{x_0}{y_0}(x + \frac{a^2}{x_0}) = k(x + \frac{a^2}{x_0}) . \end{aligned}$$

Anmerkung 1: Für $x_0 = e$ ergibt sich mithin

$$k = \frac{be}{a^2 \sqrt{1 - (\frac{e}{a})^2}} = \frac{e}{a} = \varepsilon$$

und

$$y = \varepsilon(x + \frac{a^2}{e}) = \varepsilon(x + \frac{a}{\varepsilon}) .$$

Klassische Konstruktion der Tangente an eine Ellipse

Die nachstehende Abbildung illustriert die klassische Vorgangsweise bei der Konstruktion einer Tangente an eine Ellipse, aus welcher sich sehr leicht die oben erhaltene Formel für den Anstieg der Tangent in einem Punkt P ergibt.

Gegeben sei - wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt - eine Ellipse in erste Hauptlage. Die Länge der großen Halbachse sei a , die der kleinen Halbachse sei $b < a$. Weiters sei $P = (-x_0, y_0) \in (-a, 0) \times (0, b)$ ein Punkt auf der Ellipse. Dann ist die y -Koordinate des Punktes P_K auf dem Kreis, welcher senkrecht über P liegt, $y_{0,K} = (\frac{a}{b})y_0$.

Anmerkung 3: Für die Parabel \mathcal{P} mit der Gleichung

$$y^2 = 2px$$

ist die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0 = (x_0, \sqrt{2px_0})$, $x_0 \in (0, \infty)$,

$$y = k(x + x_0) \quad \text{mit} \quad k = \frac{p}{y_0} = \sqrt{\frac{p}{2x_0}}.$$

Man erhält daher die Tangente t an die Parabel \mathcal{P} im Punkt $P_0 = (x_0, \sqrt{2px_0})$ dadurch, dass man den zugehörigen Fußpunkt $F_0 = (x_0, 0)$ am Ursprung spiegelt und die Gerade durch die Punkte $F_1 = (-x_0, 0)$ und P_0 zieht.

Für $x_0 = \frac{p}{2}$ ergibt sich mithin

$$y = k\left(x + \frac{p}{2}\right) \quad \text{mit} \quad k = 1.$$

3.3 Darstellung der Kegelschnitte in Cartesischen Koordinaten

3.3.1 Parabel

Sei \mathcal{P} die Parabel mit Brennpunkt $F = (\frac{p}{2}, 0)$ und der Leitlinie $x = -\frac{p}{2}$. Da ein beliebiger Punkt $P = (x, y)$ von Brennpunkt und Leitlinie den gleichen Abstand hat, gilt

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = p/2 + x$$

und folglich

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (p/2 + x)^2.$$

Indem man $(x - p/2)^2$ auf die rechte Seite bringt und ausquadrirt, erhält man

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Diese Differenz ist im Hinblick auf $(x^2 + e^2 + y^2)^2 = (x^2 + e^2)^2 + \Delta_0$ und $e^2 = a^2 \mp b^2$ jedoch

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (x^2 - e^2)^2 + \Delta_0 - (4a^4 - 4a^2(x^2 + e^2 + y^2) + (x^2 + e^2)^2 + \Delta_0) \\
 &= (x^2 - e^2)^2 - (4a^4 - 4a^2(x^2 + e^2 + y^2) + (x^2 + e^2)^2) \\
 &= -4x^2e^2 - (4a^4 - 4a^2(x^2 + e^2 + y^2)) \\
 &= 4((a^2 - e^2)x^2 + a^2(e^2 + y^2) - a^4) \\
 &= 4(\pm b^2x^2 + a^2(a^2 \mp b^2 + y^2) - a^4) \\
 &= 4(\pm b^2x^2 + a^2y^2 \mp a^2b^2) \\
 &= 4a^2b^2(\pm(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \mp 1).
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\pm(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \mp 1 = 0.$$

Anmerkung 1 (Zweikreiskonstruktion der Ellipse nach de la Hire):
Bekanntlich kann die Ellipse nach *de la Hire* (1685) folgendermaßen konstruiert werden,

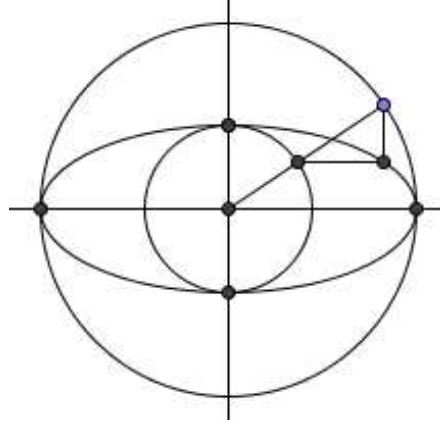


Abb. 2: Zweikreiskonstruktion der Ellipse nach *de la Hire*

denn die Punkte $(x, y) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ genügen in der Tat der Ellipsengleichung

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = (\frac{a \cos \varphi}{a})^2 + (\frac{b \sin \varphi}{b})^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

3.3. DARSTELLUNG DER KEGELSCHNITTE IN CARTESISCHEN KOORDINATEN 47

Anmerkung 2: Da die Ellipse mit den Längen der Halbachsen $a > b > 0$ ein mit dem Faktor $\frac{b}{a} < 1$ in einer bestimmten Richtung gestreckter Kreis mit dem Radius a ist - wie man beispielsweise anhand der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y \cdot \frac{b}{a}}{b}\right)^2 = 1$$

sieht - ist ihr Flächeninhalt

$$a^2 \pi \cdot \frac{b}{a} = ab\pi = a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \pi,$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$ die numerische Exzentrizität ist.

"Die Fläche der Ellipse hat zur Fläche des Kreises, der die große Achse zum Durchmesser hat, dasselbe Verhältnis wie die kleine Achse der Ellipse zur großen."

Apollonios von Perge

Satz²: Sei \mathcal{C} eine konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 mit Umfang $U(\mathcal{C}) < \infty$ und sei o.B.d.A. $(0, 0) \in \mathcal{C}$. Seien weiters $b(\alpha)$ die Breite von \mathcal{C} gemessen in Richtung der Geraden

$$y = x \cdot \tan(\alpha), \quad \alpha \in [0, \pi)$$

und

$$D(\mathcal{C}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi b(\alpha) d\alpha$$

die mittlere Breite von \mathcal{C} . Dann ist der Umfang von \mathcal{C} gleich dem Umfang des Kreises mit Durchmesser $D(\mathcal{C})$, nämlich

$$U(\mathcal{C}) = D(\mathcal{C}) \cdot \pi = \int_0^\pi b(\alpha) d\alpha. \quad (1)$$

Anmerkung 3: Dieser Sachverhalt ist offensichtlich richtig für den Spezialfall, dass \mathcal{C} ein Kreis ist.

²Dieser Satz, welcher vom französischen Mathematiker *Augustin-Louis Cauchy* (1782 – 1857) stammt, ist typisch für die sogenannte *Integralgeometrie*. Diese wiederum wurde maßgeblich durch den österreichischen Mathematiker *Wilhelm Johann Eugen Blaschke* (1885 – 1962) entwickelt.

Wie ein Kreis, ist auch ein *Reuleux-Dreieck*³ eine Kurve konstanter Breite. Daher erfüllt selbstverständlich auch ein solches - und alle weiteren Kurven konstanter Breite - den Sachverhalt (1).

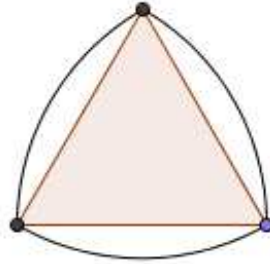


Abb. 3: Abbildung eines Reuleux-Dreiecks

Für eine Ellipse \mathcal{E} , deren Länge der großen Halbachsen a und deren numerische Exzentrizität ε ist, gilt

$$b(\alpha) = 2a\sqrt{1 - (\varepsilon \sin \alpha)^2}, \quad \alpha \in [0, \pi).$$

Somit ist der Umfang $U(\mathcal{E})$ der Ellipse

$$U(\mathcal{E}) = 4a \cdot E(\varepsilon) \quad \text{mit} \quad E(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (\varepsilon \sin \alpha)^2} d\alpha.$$

Das Integral $E(\varepsilon)$ heißt *elliptische Integral II. Art* und lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken.

3.3.3 Darstellung mit Hilfe einer Leitlinie

Parabel: Es ist $l = p$ bzw. $\frac{l}{p} = 1$. Für alle Punkte (x, y) der Parabel $y^2 = 2px$ gilt im Hinblick auf Abschnitt 3.3.1

$$\frac{\sqrt{y^2 + (x - p/2)^2}}{p/2 + x} = 1.$$

Ellipse: Wir betrachten eine Ellipse mit den Halbachsen a und b in erster Hauptlage. $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ sei ihre numerische Exzentrizität und (x, y) ein

³benannt nach dem deutschen Ingenieur *Franz Reuleux* (1829 – 1905)

3.3. DARSTELLUNG DER KEGELSCHNITTE IN CARTESISCHEN KOORDINATEN 49

allgemeiner Punkt der Ellipse. Für den Quotienten der Abstände des allgemeinen Punktes (x, y) vom Brennpunkt $(-a\varepsilon, 0)$ und von der zugehörigen Leitlinie $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ gilt im Hinblick auf Abbildung 2 in Abschnitt 2.1.3

$$\frac{\sqrt{y^2 + (x + \varepsilon a)^2}}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon. \quad (*)$$

Anmerkung: Diese Darstellung lässt sich auch analytisch leicht bestätigen: (*) ist nämlich gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} 0 &= y^2 + (x + \varepsilon a)^2 - (\varepsilon x + a)^2 \\ &= y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 - a^2(1 - \varepsilon^2) \\ &= y^2 + (x^2 - a^2)(1 - \varepsilon^2), \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$ und der Ellipsengleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

gilt in der Tat

$$\begin{aligned} 0 &= y^2 + (x^2 - a^2)(1 - \varepsilon^2) \\ &= y^2 + (x^2 - a^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ &= b^2 \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Hyperbel: Wir betrachten eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b in erster Hauptlage. $\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$ sei ihre numerische Exzentrizität und (x, y) ein allgemeiner Punkt der Hyperbel. Für den Quotienten der Abstände des allgemeinen Punktes (x, y) vom Brennpunkt $(a\varepsilon, 0)$ und von der zugehörigen Leitlinie $x = \frac{a}{\varepsilon}$ ⁴ gilt im Hinblick auf Abbildung 4 in Abschnitt 2.1.3 wegen

$$\frac{\sqrt{y^2 + (x - \varepsilon a)^2}}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Diese Darstellung lässt sich - analog zur Vorgangsweise bei der Ellipse - auch analytisch leicht bestätigen.

⁴Für den Abstand des Punktes L vom Mittelpunkt der Hyperbel gilt nämlich $e - p = e - \frac{l}{\varepsilon} = a\varepsilon - \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon}$.

Zu den Bezeichnungen "Ellipse", "Parabel" und "Hyperbel"

Die erste Klassifikation der Kegelschnitte stammt von *Apollonios von Perge* (ca. 260 - ca. 190 v.Chr.). Die Brennpunkt-Leitlinien-Eigenschaft der Kegelschnitte stammt von *Pappos von Alexandria* (ca. 290 - ca. 350 n.Chr.).

Gegeben sei ein Brennpunkt $F = (\frac{l}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon), 0)$ und die zugehörige Leitlinie $x = -\frac{l}{(1+\varepsilon)\varepsilon}$. Der entsprechende Scheitelpunkt S ist daher der Koordinatenursprung $O = (0, 0)$ und die Entfernung des Brennpunkts von der Leitlinie ist

$$\frac{l}{1+\varepsilon} + \frac{l}{(1+\varepsilon)\varepsilon} = \frac{l}{1+\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{l}{\varepsilon}.$$

Sei weiters $P = (x, y)$ ein Punkt des Kegelschnitts. Dann gilt

$$\frac{\sqrt{(x - \frac{l}{1+\varepsilon})^2 + y^2}}{x + \frac{l}{(1+\varepsilon)\varepsilon}} = \varepsilon$$

bzw.

$$y^2 + (x - \frac{l}{1+\varepsilon})^2 = (\varepsilon x + \frac{l}{1+\varepsilon})^2$$

oder, gleichbedeutend,

$$\begin{aligned} y^2 &= (\varepsilon x + \frac{l}{1+\varepsilon})^2 - (x - \frac{l}{1+\varepsilon})^2 = x^2(\varepsilon^2 - 1) + \frac{2l}{1+\varepsilon}(\varepsilon + 1)x \\ &= 2lx - (1 - \varepsilon^2)x^2. \end{aligned}$$

Somit ist der Kegelschnitt

$$y^2 = \begin{cases} 2lx - (1 - \varepsilon^2)x^2 & \text{eine Ellipse} & \text{für } \varepsilon < 1 \\ 2lx = 2px & \text{eine Parabel} & \text{für } \varepsilon = 1 \\ 2lx + (\varepsilon^2 - 1)x^2 & \text{eine Hyperbel} & \text{für } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Der griechische Begriff

ἔλλειψις	[ellēipsis]	Mangel (eines Quadrats)
παραβολή	[parabolē]	bedeutet anlegen (eines Rechtecks).
ὑπερβολή	[hyperbolē]	Überschuss (eines Quadrats).

3.3.4 Darstellung in Polarkoordinaten

Ellipse: Aus der Beziehung (*) in Abschnitt 3.3.3 ergibt sich, indem wir den Nenner in der Form

$$x + \frac{a}{\varepsilon} = x + \varepsilon a + \frac{a}{\varepsilon} - \varepsilon a = x + \varepsilon a + \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon}$$

schreiben,

$$\frac{\sqrt{y^2 + (x + \varepsilon a)^2}}{x + \varepsilon a + \frac{l}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \text{mit} \quad l = a(1 - \varepsilon^2)$$

und, indem wir $r = \sqrt{y^2 + (x + \varepsilon a)^2}$ setzen und $x + \varepsilon a = r \cos \varphi$ berücksichtigen,

$$\frac{r}{r \cos \varphi + \frac{l}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Nun ist

$$\frac{r}{r \cos \varphi + \frac{l}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad r = r \varepsilon \cos \varphi + l \quad \Leftrightarrow \quad r(1 - \varepsilon \cos \varphi) = l$$

und somit ⁵

$$r(\varphi) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad \text{mit} \quad l = a(1 - \varepsilon^2).$$

Für die speziellen Winkel $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ ergibt sich

$$r(\varphi) = \begin{cases} a(1 + \varepsilon) = e + a & \text{für } \varphi = 0 \\ a(1 - \varepsilon^2) = l & \text{für } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \\ a(1 - \varepsilon) = a - e & \text{für } \varphi = \pi. \end{cases}$$

Anmerkung 1: Für die **Parabel** erhält man - ähnlich wie im Fall der Ellipse - die Formel

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

(Man bedenke, dass für die Parabel $l = p$ und $\varepsilon = 1$ sind.) Für die speziellen Winkel $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ ergibt sich

$$r(\varphi) = \begin{cases} \infty & \text{für } \varphi = 0 \\ p & \text{für } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \\ \frac{p}{2} & \text{für } \varphi = \pi. \end{cases}$$

⁵ Wunderlich [5] verwendet auf Seite 83 die Bezeichnung p für das semi-latus rectum $l = p\varepsilon = a(1 - \varepsilon^2)$.

Anmerkung 2: Für die **Hyperbel** erhält man dieselbe Formel wie für die Ellipse, nämlich

$$r(\varphi) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varphi \in D \subset [0, 2\pi),$$

wobei allerdings für diese $l = a(\varepsilon^2 - 1)$ gilt. Nun ist wegen $\varepsilon > 1$ der Nenner genau dann gleich 0, wenn gilt

$$\cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon},$$

oder im Hinblick auf $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ wenn gilt

$$\tan \varphi = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \pm \frac{b}{a}.$$

Sei nun $\varphi_0 = \arctan(\frac{b}{a})$. Dann sind die Winkel φ_0 und $2\pi - \varphi_0$ Polstellen der Funktion $r(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, und somit von deren Definitionsbereich D auszunehmen. Für die speziellen Winkel $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ gilt

$$r(\varphi) = \begin{cases} -a(\varepsilon + 1) = -(a + e) & \text{für } \varphi = 0 \\ a(\varepsilon^2 - 1) = l & \text{für } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \\ a(\varepsilon - 1) = e - a & \text{für } \varphi = \pi. \end{cases}$$

3.3.5 Archimedes' Quadratur der Parabel

Archimedes' Quadratur der Parabel⁶: Wir gehen von der Parabelgleichung

$$y = x^2$$

aus. Es sei $a < b$. Dann ist der Anstieg der Sekante S_{ab} zwischen den Punkten (a, a^2) und (b, b^2)

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a.$$

Die Ableitung von y ist $y' = 2x$. Daher ist der Anstieg der Parabel an der Stelle des arithmetischen Mittels $\frac{a+b}{2}$ der Werte a und b

$$2 \frac{a+b}{2} = a + b,$$

⁶„Die Quadratur der Parabel“ aus den *Abhandlungen von Archimedes* [26]

3.3. DARSTELLUNG DER KEGELSCHNITTE IN CARTESISCHEN KOORDINATEN 53

also gleich dem Anstieg der Sekante S_{ab} . Diese spezifische Eigenschaft der Parabel hat eine weitere zur Folge:

Die Fläche F_{Δ} des Dreiecks $\Delta : (a, a^2), (b, b^2), (\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$ ist wegen

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

und

$$b^2 + a^2 - 2(\frac{a+b}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{2}$$

gleich

$$\begin{aligned} F_{\Delta} &= (b-a) \cdot \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \frac{b^2 + (\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a+b}{2})^2 + a^2}{2} \\ &= \frac{b-a}{4} \cdot [b^2 + a^2 - 2(\frac{a+b}{2})^2] \\ &= \frac{1}{8} (b-a)^3. \end{aligned}$$

Das besagt wiederum etwas ganz Bemerkenswertes: Die Fläche F_{Δ} hängt nur von der Differenz $b-a$ der Abszissenwerte ab: Für die Abszissenwerte $a+c$ und $b+c$ ergibt sich dieselbe Fläche, egal wie groß c ist.

Das impliziert Folgendes: Sind

$$\frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} = \frac{a+3b}{4}$$

die arithmetischen Mittel von a und $\frac{a+b}{2}$ bzw. von $\frac{a+b}{2}$ und b , dann sind die Flächen der beiden Dreiecke

$$(a, a^2), (\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2), (\frac{3a+b}{4}, (\frac{3a+b}{4})^2)$$

und

$$(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2), (b, b^2), (\frac{a+3b}{4}, (\frac{a+3b}{4})^2)$$

gleich

$$\frac{1}{8} (\frac{b-a}{2})^3 = F_{\Delta} \cdot \frac{1}{8}$$

Die Summe aller drei Flächen ist daher

$$F_{\Delta} \cdot (1 + \frac{2}{8}) = F_{\Delta} \cdot (1 + \frac{1}{4})$$

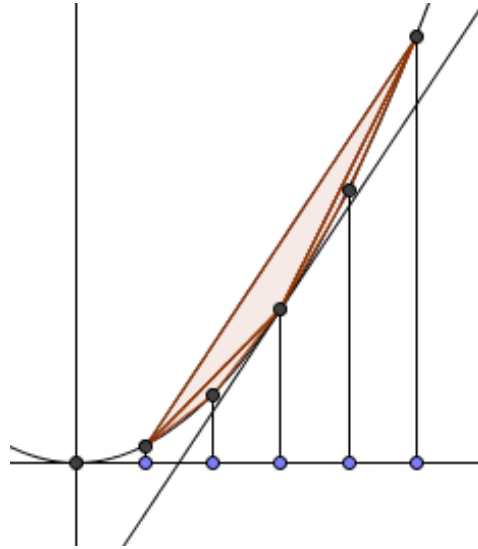


Abb. zu Archimedes' Quadratur der Parabel

Betrachtet man zusätzlich die 4 Flächen der durch den Repräsentanten

$$(a, a^2), \left(\frac{3a+b}{4}, \left(\frac{3a+b}{4}\right)^2\right), \left(\frac{7a+b}{8}, \left(\frac{7a+b}{8}\right)^2\right)$$

gegebenen Dreiecke, so erhält man insgesamt

$$F_{\Delta} \cdot \left(1 + \frac{2}{8} + \frac{2^2}{8^2}\right) = F_{\Delta} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right).$$

Setzt man diese Verfeinerung fort, so ist die durch die Parabel $y = x^2$ von unten und ihre Sekante S_{ab} von oben begrenzte Fläche F wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

insgesamt

$$F = F_{\Delta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = F_{\Delta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = F_{\Delta} \cdot \frac{4}{3} = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

Anmerkung 1: Obiges ist die älteste bekannte Anwendung der Summenformel für die geometrische Reihe.

Die von Archimedes verwendete Methode nennt man Exhaustions- oder Ausschöpfungsmethode. Den Begriff Exhaustionsmethode hat übrigens der Jesuit *Gregorius a Santo Vintcentio* (1584 – 1669) geprägt.

Anmerkung 2: Aus der Integralrechnung wissen wir

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Daher ist die gesuchte Fläche F wegen $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned} F &= (b - a) \cdot \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{b^3 - a^3}{3} \\ &= \frac{b - a}{6} \cdot (3(b^2 + a^2) - 2(a^2 + ab + b^2)) = \frac{(b - a)^3}{6}. \end{aligned}$$

3.3.6 Klassifikation der Kegelschnitte mit Hilfe von Schwerlinien

Die Quadratur der Parabel durch *Archimedes* (ca. 287 – 212 v.Chr.) beruht auf einer Charakterisierung der Parabel durch deren Schwerlinien. Bekanntlich hat *Appolonios von Perge* (ca. 260 – ca. 190 v.Chr.) als Erster die Kegelschnitte systematisch untersucht. Auf ihn geht auch die hier beschriebene Klassifikation der Kegelschnitte mit Hilfe von Schwerlinien zurück, welche er "Durchmesser" nannte.

Beweis und Illustration der entsprechenden Aussagen erfolge allenfalls im Rahmen der Aufgaben 34 und 35.

Charakterisierung der Parabel

Gegeben seien eine Parabel und eine Schar \mathcal{G} paralleler Geraden g , welche die Achse a der Parabel unter einem vorgegebenen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ schneiden. Seien weiters $P_1(g)$ und $P_2(g)$ die beiden Schnittpunkte einer Geraden $g \in \mathcal{G}$ mit der Parabel (sofern diese existieren) und

$$\bar{P}(g) = \frac{P_1(g) + P_2(g)}{2}$$

deren Schwerpunkt. Überdies sei $P(t)$ der Berührungspunkt der Tangente $t \in \mathcal{G}$ an die Parabel. Dann gilt folgende Aussage:

(i) Alle Schwerpunkte $\bar{P}(g)$, $g \in \mathcal{G}$ liegen auf einer Geraden, einer sogenannten *Schwerlinie*.

Diese Gerade

(ii) enthält (naturgemäß) den Berührungspunkt $P(t)$ und

(iii) ist parallel zur Achse a der Parabel.

(iv) Für den Spezialfall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ stimmt die Schwerlinie mit der Achse a der Parabel überein.

Charakterisierung von Ellipse und Hyperbel

Geben sei

- eine Ellipse oder eine Hyperbel in erster Hauptlage mit den Parametern a und b in der schulüblichen Parametrisierung und
- eine Schar \mathcal{G} paralleler Geraden.

Man schneide nun jede der Geraden $g \in \mathcal{G}$ mit der Ellipse (der Hyperbel), ermittle - falls existent - die beiden Schnittpunkte $P_1(g)$ und $P_2(g)$ und bilde den Schwerpunkt

$$\bar{P}(g) = \frac{P_1(g) + P_2(g)}{2} .$$

Überdies sei $P(t)$ der Berührungspunkt einer der beiden Tangenten $t \in \mathcal{G}$ an die Ellipse (die Hyperbel). Dann gilt folgende Aussage:

(i) Alle Schwerpunkte $\bar{P}(g)$, $g \in \mathcal{G}$ liegen auf einer Geraden, einer sogenannten *Schwerlinie* s .

Diese Gerade

(ii) enthält (naturgemäß) die beiden Berührungspunkte $P(t)$ und

(iii) geht durch den Mittelpunkt der Ellipse (der Hyperbel).

(iv) Für den Fall, dass die Geraden achsenparall sind, stimmen die Schwerlinien mit den Achsen überein.

(v) Ist im Fall der Hyperbel der Anstieg der Geraden der Geraden-schar $k(g) > \frac{b}{a}$, $g \in \mathcal{G}$, so (a) ist der Anstieg der Schwerlinie $k(s) < \frac{b}{a}$ und (b) die Abstände des Schwerpunkts $\bar{P}(g)$ von den beiden Schnittpunkten der Geraden g mit den Asymptoten sind gleich.

3.4 Anwendungen der Kegelschnitte

3.4.1 Das Delische Problem

Gemäß einer Legende soll das Orakel den Bewohnern der griechischen Insel Delos mitgeteilt haben, dass sie von einer Seuche befreit würden, wenn es ihnen gelänge, einen Würfel so zu konstruieren, dass dieser das doppelte Volumen des würfelförmigen Altars im Heiligtum des Gottes Apollo habe. Platon erklärte dazu, der Gott wollte die Griechen beschämen, weil sie das Studium der Mathematik vernachlässigt hätten.

In unserer Terminologie geht es darum, die Größe $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren, denn ist a die Seitenlänge des gegebenen Würfels, so gilt

$$(\sqrt[3]{2} \cdot a)^3 = 2 \cdot a^3.$$

Es ist gesichert, dass *Menaichmos* (um 380 - um 320 v.Chr.) - ein Mitglied der Platonischen Akademie - beim Versuch, diese Aufgabe zu lösen, die Kegelschnitte Parabel und Hyperbel entdeckt hat: Ist nämlich a die gegebene Seitenlänge, so hat bereits *Hippokrates von Chios* (nicht zu verwechseln mit dem Arzt *Hippokrates von Kos*) im 5. Jahrhundert entdeckt, dass die Konstruktion der fraglichen Strecke gleichbedeutend damit ist, zwei Strecken x und y derart zu konstruieren, dass gelten

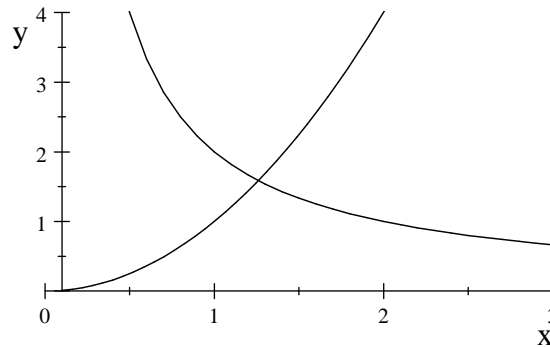
$$a : x = x : y \quad \text{und} \quad a : x = y : 2a.$$

In unserer Notation ist die erste Beziehung gleichwertig mit der Parabelgleichung

$$x^2 = ay,$$

und die zweite mit der Hyperbelgleichung

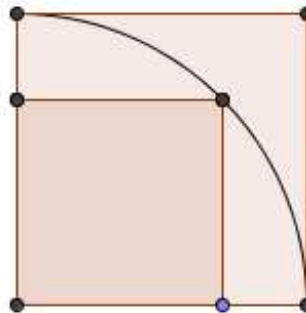
$$xy = 2a^2.$$

Abb.: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{2}{x}$

Indem man aus der zweiten y substituiert und in die erste einsetzt, erhält man

$$x^2 = \frac{2a^3}{x} \quad \text{bzw.} \quad x^3 = 2a^3.$$

Anmerkung 1: Die Seitenlängen eines Quadrats so zu konstruieren, dass dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist wie ein vorgegebenes, ist einfach:



Es ist jedoch unmöglich, das Delische Problem mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu lösen.

Übrigens: Überträgt man die in der obigen Abbildung dargestellte Vorgangsweise in die dritte Dimension, so erhält man

$$(\sqrt[3]{3} \cdot a)^3 = 3^{3/2} \cdot a^3 > 5 \cdot a^3.$$

Anmerkung 2: *Menaichmos* war Lehrer *Alexanders des Großen*. Auf dessen Frage, ob es nicht eine leichtere Möglichkeit gebe, die Geometrie zu studieren, soll Menaichmos gesagt haben, dass es zwar königliche Wege und Wege für

das gemeine Volk gäbe, um über Land zu reisen, dass aber in der Geometrie nur ein Weg für alle offenstehe. Diese Einstellung wird oft in der kurzen Form ausgedrückt: "Es gibt keinen Königsweg in der Geometrie".

3.4.2 Physik und Astronomie

"Die Philosophie ist in dem großartigsten aller Bücher niedergeschrieben, das die ganze Zeit vor unseren Augen aufgeschlagen liegt (ich meine das Universum), doch man kann es nicht verstehen, ohne zunächst die Sprache zu lernen, die Buchstaben zu kennen, mit denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematiker geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren."

Galileo Galilei, Il Saggiatore (1623)

"The miracle of the appropriateness of mathematics is a gift which we neither understand nor deserve."

Eugene Paul Wigner (1902–1995) ungarisch-US-amerikanischer Physiker

Die Renaissance hat uns nicht nur die Zentralperspektive und damit die Renaissance der Kegelschitte, sondern auch deren Anwendungen in Physik und Astronomie beschert:

Galilei: Das Fallgesetz $s = \frac{g}{2}t^2$

Kepler: Das erste Keplergesetz

Huygens: Die gleichförmige Bewegung auf der Kreisbahn $F = \frac{mv^2}{r}$

Galileis Fallgesetz

Axiom 1: Bei einer freien horizontalen Bewegung bleiben Geschwindigkeit und Richtung konstant.

Axiom 2: Ein frei fallender Körper wird gleichförmig beschleunigt.

Sei v_0 die (Vertikalkomponente der) Geschwindigkeit eines Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$ und sei g die Erdbeschleunigung. Nach Axiom 2 ist dann die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt $t > 0$ gleich

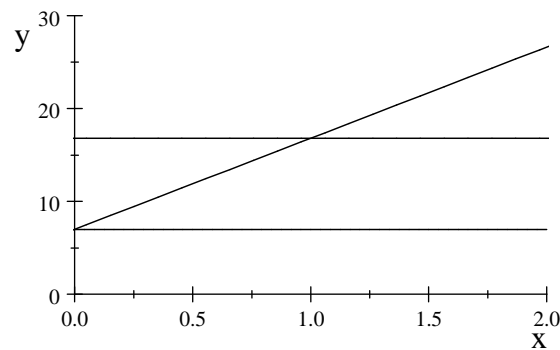
$$v = v_0 + g \cdot t.$$

Da die durchschnittliche Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall $[0, t]$ somit

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{1}{2}(v_0 + v) = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + g \cdot t) \\ &= v_0 + \frac{g}{2} \cdot t\end{aligned}$$

ist, ist die zurückgelegte Wegstrecke s gleich

$$\begin{aligned}s &= \bar{v} \cdot t = \left(v_0 + \frac{g}{2} \cdot t\right) \cdot t \\ &= v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2.\end{aligned}$$



Für den Spezialfall, dass die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist, erhalten wir für den zurückgelegten Weg s bzw. die Geschwindigkeit v zum Zeitpunkt t

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad \text{und} \quad v = g \cdot t.$$

Daraus lässt sich der Weg s in Abhängigkeit von v folgendermaßen darstellen

$$s = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{(g \cdot t)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}.$$

Die Geschwindigkeit, in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg dargestellt, ist somit

$$v^2 = 2gs.$$

In den "Unterredungen" *Galileis* [22] aus dem Jahre 1638 ist zu lesen (vgl. auch [49], S. 32):

”Ich habe eine Bronzekugel, die völlig rund gearbeitet ist, nicht größer als eine Nuss; wirft man dieselbe auf einen Metallspiegel, der nicht ganz horizontal liegt, sondern ein wenig geneigt ist, so daß die Kugel in ihrem Laufe einen leichten Druck ausübt, so beschreibt sie eine feine parabolische Linie, die mehr oder weniger gestreckt sein wird, je nach Neigung der Metallplatte. Zugleich läßt sich demonstrieren, daß geworfene Körper in Parabeln sich bewegen.”

Anmerkung 1: Die Formel

$$s = \frac{a}{2}t^2$$

für den Weg s der gleichförmig beschleunigten Bewegung bei Anfangsgeschwindigkeit 0 ist auch unter dem Namen *”Merton-Theorem”* bekannt. Denn schon im 14. Jahrhundert hatten Gelehrte am Merton College in Oxford erkannt und bewiesen, dass - in heutiger Beschreibung - der *”Wert”* (=Weg) dieser Bewegung derselbe ist, wie bei einer gleichförmigen Bewegung, deren Geschwindigkeit gleich der Momentangeschwindigkeit $(a \cdot t)/2$ in der Mitte des Zeitintervalls $[0, t]$ ist (siehe [54] und [57]).

Anmerkung 2: *”Evangelista Torricelli bearbeitete mit großem Erfolg ein bis dahin wenig beachtetes Gebiet der Physik, die Dynamik der Flüssigkeiten, wobei er unter anderem das hochwichtige Gesetz entdeckte, daß ein Strahl, der aus einem gefüllten Behälter austritt, immer die Form der Parabel annimmt und eine Ausflußgeschwindigkeit besitzt, die der Quadratwurzel aus der Druckhöhe proportional ist.”* (aus [11], S. 437 – 438).

Die Keplergesetze (Johannes Kepler, 1571 – 1634):

(K1) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.

(*Astronomia Nova*, 1609)

(K2) Flächensatz: Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

(*Astronomia Nova*, 1609)

(K3) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

(*Harmonices mundi*, 1619)

”Mit Recht verweist Serres⁷ darauf, von welcher Tragweite für Kepler - der besessen war von der Suche nach dem Zentrum und eine tiefe Abneigung gegen die Idee des Unendlichen hatte - die Einführung der elliptischen Bahnen war: Die Geometrie des Kegels übertrifft die der Kugel an Vollkommenheit, während die Meditation über den Fixpunkt sich vom Mittelpunkt der Kugel zur Spitze des Kegels verlagert: Der privilegierte Punkt vom Zentrum der Konfiguration zum Blickpunkt, von dem aus man sie erfasst. ...”

Hubert Damisch [34], S. 68

Spezifika der Ellipsenbahn

Wir gehen von einer Ellipse mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse $b \leq a$ in erster Hauptlage aus, schreiben diese jedoch nicht in der schulüblichen Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

an, sondern wählen ein für astronomische Zwecke adäquate Form. Eine wichtige Größe ist dabei die *numerische Exzentrizität* ε der Ellipse

$$\varepsilon := \sqrt{1 - (b/a)^2} \quad \text{und somit} \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Der in (K1) ausgezeichnete Brennpunkt ist $(a\varepsilon, 0) =: B$. Der Punkt $P_0 = (a, 0)$ ist der dem Brennpunkt B nächstgelegene Punkt der Ellipse, der Punkt $(-a, 0)$ der fernstgelegene.

Die Bezeichnungen in der Astronomie sind

$$\begin{array}{lll} (a, 0) & \textit{Perihel} & (\text{sonnennächster Punkt}) \\ (-a, 0) & \textit{Aphel} & (\text{sonnenfernster Punkt}). \end{array}$$

Seien nun r die Länge des Radiusvektors zwischen einem beliebigen Punkt P der Ellipse und dem Brennpunkt B (auch *Fahrstrahl* genannt) und φ der Winkel P_0BP . Dann ist

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Beispielsweise ergeben sich für Perihel und Aphel wegen $1 - \varepsilon^2 = (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)$

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon) \\ r(\pi) &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

⁷Michel Serres (1930–), französischer Philosoph

Die Bahnkurve wird demnach durch

$$(\varphi, r(\varphi)), \varphi \in [0, 2\pi)$$

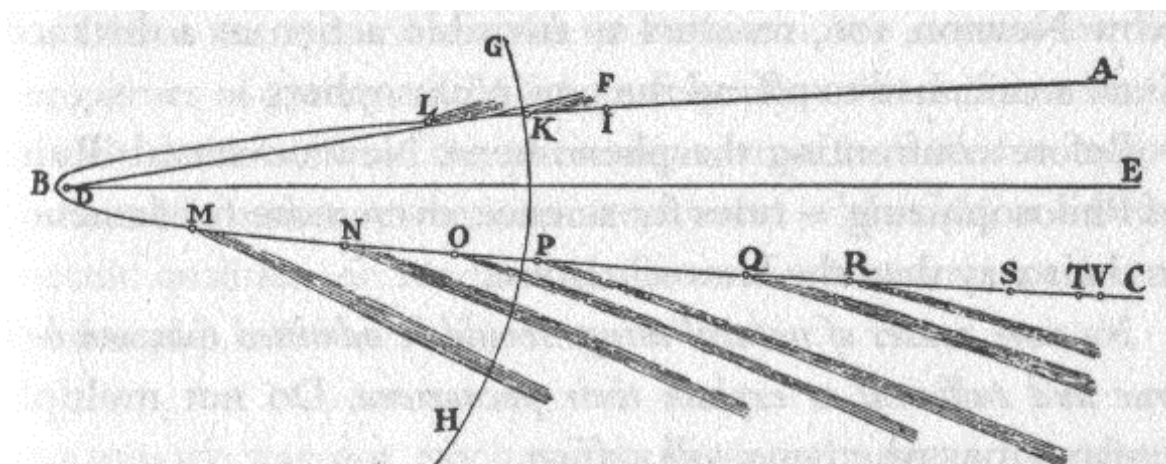
beschrieben.

Parabel- und Hyperbelbahn

Der sächsische Pfarrer *Georg Samuel Dörffel* (1643 – 1688) gibt in seinem Werk *"Astronomische Beobachtungen des großen Cometen, welcher A. 1680 und 1681 erschienen"* zu bedenken, dass Kometen eine parabolische Bahn besitzen könnten, in deren Brennpunkt die Sonne steht.

"Ob nicht dieses (und der anderen) Cometen Bewegungs-Linien eine solche Parabole sey/dero Focus in das Centrum der Sonnen zu setzen?"

(*Georg Samuel Dörffel*, 1682)



The comet of 1680 – 'as observed by Flamsteed' and 'corrected by Dr. Halley'.

Isaak Newton veröffentlicht im Jahre 1687 seine *"Principia Mathematica"*. Darin leitet er u.a. aus den drei Keplerschen Gesetzen das nach ihm benannte Gravitationsgesetz her und folgert daraus, dass - in Verallgemeinerung des ersten Keplerschen Gesetzes - ein Trabant der Sonne die Bahn eines Kegelschnitts beschreibt, in deren Brennpunkt bzw. in einem von deren beiden Brennpunkten die Sonne steht.

Seien

- $v_1 = 7.9097 \text{ km/sec}$ die 1. kosmische Geschwindigkeit, *Orbital- oder Kreisgeschwindigkeit*: Geschwindigkeit, die ein Satellit benötigt, um die Erde auf einer Bahn direkt über ihrer Oberfläche zu umkreisen,
- $v_2 = \sqrt{2}v_1 = 11.186 \text{ km/sec}$ die 2. kosmische Geschwindigkeit, *Flucht- oder Parabolische Geschwindigkeit*: Geschwindigkeit, die ein Flugkörper benötigt, um das Gravitationsfeld der Erde verlassen zu können,
- v die Bahngeschwindigkeit eines Satelliten/Flugkörpers.

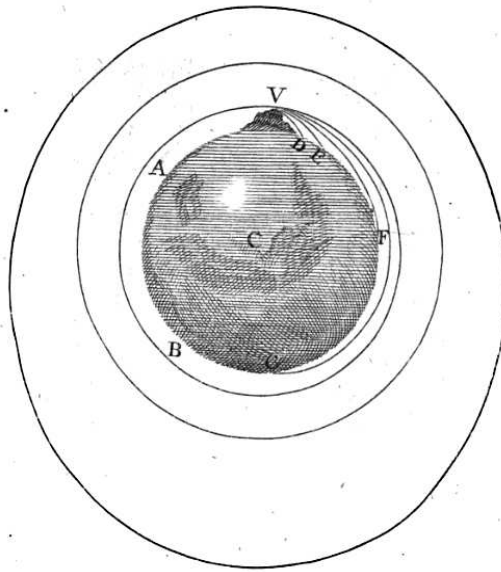


Abbildung aus Newton's Werk
"A Treatise of the System of the World", 1728

"That by means of centripetal forces the planets may be retained in certain orbits, we may easily understand that, if we consider the motions of projectiles ... for a stone that is projected is by the pressure of its own weight forced out of the rectilinear path, which by the initial projection alone it should have pursued, and made to describe a curved line in the air; and through the crooked way is at last brought down to the ground; and the greater the velocity is with which it is projected, the farther it goes before it falls to the Earth. We may therefore suppose the velocity to be so increased, that it would describe an arc of 1, 2, 5, 10, 100, 1000 miles before it arrives at the Earth, till at last, exceeding the limits of the Earth, it should pass into space without touching it."

Isaac Newton, *Principia Mathematica*, Vol. II, p. 551

Ist $v \in [v_1, v_2)$, so umrundet der Satellit die Erde auf einer elliptischen Bahn,
 ist $v = v_2$, so verlässt der Flugkörper die Erde auf einer parabolischen Bahn,
 ist $v > v_2$, so verlässt der Flugkörper die Erde auf einer hyperbolischen Bahn.

Zitate zur ersten und zweiten kosmischen Geschwindigkeit

"Dagegen ist es theoretisch möglich, einen Körper so hoch zu werfen, daß er nicht mehr zurückfällt". Die Astronomie lehrt nämlich, daß ein Körper nicht mehr auf die Erde zurückfallen kann, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 11,2 km/sek weggeschleudert wird. Mit einer etwas geringeren Geschwindigkeit kann man ihn beliebig hoch werfen, doch fällt er nachher wieder auf die Erde zurück."

"Ein Körper, der mit dieser Geschwindigkeit von der Erde abgeschleudert wird, fällt nicht mehr auf die Erde zurück, er beschreibt eine Parabel, deren zweiter Scheitelpunkt in der Unendlichkeit liegt. Wenn die Geschwindigkeit noch größer wird, so kann die Erde den Körper noch weniger zurückholen."

Hermann Oberth (1894 – 1969),

aus Siebenbürgen (Rumänien) stammender deutscher Raumfahrtpionier

Anmerkung 3: Den Begriff *Fluchtgeschwindigkeit* (*escape velocity, parabolic velocity*) hat vermutlich der US-amerikanische Raumfahrtpionier *Robert H. Goddard* (1882 - 1945) geprägt.

Die erste Rakete, die mit einer Höhe von 189 km den Weltraum erreichte, war eine deutsche V2 Rakete bei einem Testflug im Juni 1944. Am 4. Oktober 1957 startete die Sowjetunion mit *Sputnik 1* den ersten künstlichen Satelliten, der die Erde umkreiste. *Luna 1* war das erste von Menschenhand geschaffene Objekt, welches im Jahre 1959 die Fluchtgeschwindigkeit erreichte.

Huygens Formel der Zentripetalkraft

Die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn, bei welcher der Betrag der Bahngeschwindigkeit gleich bleibt, nennt man eine gleichförmige Kreisbewegung. Weil sich aber die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von einem Bahnpunkt zum anderen ändert, ist diese Bewegung beschleunigt. Wir wollen nun die Beschleunigung ermitteln.

Der Massenpunkt wird durch eine Kraft, die zum Mittelpunkt des Kreises gerichtet ist, auf der Bahn gehalten. Ohne die Wirkung der Kraft würde sich der materielle Punkt von P aus entlang der Tangente mit der konstanten

Die angreifende Kraft erteilt dem Körper eine Beschleunigung a zum Kreismittelpunkt hin. Unter ihrer Einwirkung legt der Körper in dem kleinen Zeitintervall Δt den Weg

zurück. Der Körper gelangt so zum Punkt Q . Weil Q auf dem Kreis liegt, ist das Dreieck PQR rechtwinkelig. Es gilt daher der Höhensatz

Das bedeutet

oder

Wieder müssen wir den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ vollziehen. Der Term $(\Delta t)^2$ fällt dadurch weg und wir erhalten

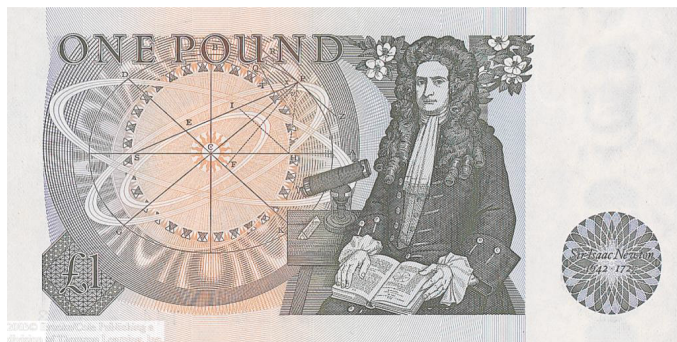
$$a \cdot r = v^2.$$

Der Betrag des Beschleunigungsvektors ist daher

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (1)$$

Anmerkung 4: Bei festem Radius r ist (1) die Gleichung einer Parabel, bei fester Geschwindigkeit v die einer rechtwinkligen Hyperbel.

Anmerkung 5: Aus dem dritten Keplerschen Gesetz und Huygens' Formel der Zentripetalkraft lässt sich - anhand des Spezialfalls einer Kreisbahn - sehr leicht das Newtonsche Gravitationsgesetz herleiten (vgl. etwa die Fachbereichsarbeit von *L. Österreicher* [44], S. 7-13, oder die Diplomarbeit von *Golser* [40], S. 16-20).



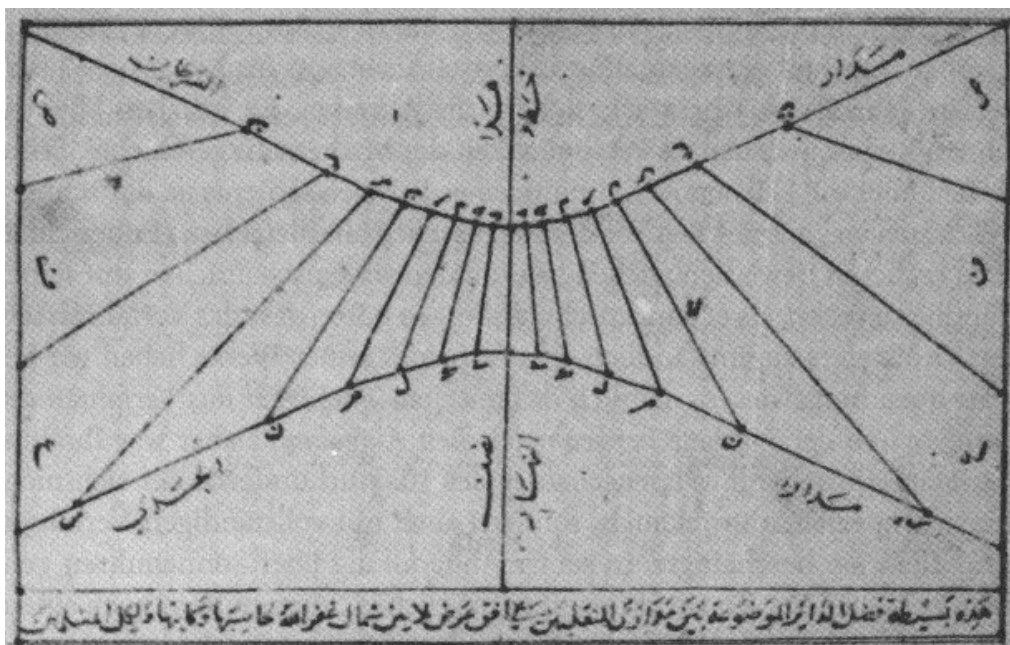
Isaak Newton hat in seiner *Principia Mathematica* (1687) bei der Herleitung seines Gravitationsgesetzes aus Keplers ersten beiden Gesetzen massiv auf klassische geometrische Eigenschaften der Ellipse zurückgegriffen. Die britische Ein-Pfund-Note zeigt die einschlägige Abbildung.

3.4.3 Sonnenuhren, Optik, Akustik, Architektur und Erdabplattung

Sonnenuhren

Der Schatten, den die Spitze eines *Schattenstabes* (griechisch: *Gnomon*) auf eine Ebene wirft, beschreibt im Laufe eines Tages den Teil eines Kegelschnitts. Ein solcher Schattenstab kann eine auf einem Platz errichteter Obelisk sein oder ein Stab, welcher in einem geeigneten Winkel an einer senkrechten Wand befestigt ist. Die auf diese Weise erzeugten Kegelschnitte sind für alle Orte zwischen südlichem und nördlichem Polarkeis Hyperbeln. Die nachstehende Abbildung, welche dem Buch [36], S. 94 entnommen ist, stammt aus

einer Abhandlung aus dem Ägypten des 15. Jahrhunderts über die Theorie der Sonnenuhren von *al-Kāradīsī*, einem *muwaqqit* (einer Person, welche die Zeiten für das muslimische Gebet bestimmt). Die beiden Hyperbeläste geben den Weg des Schattenzeigers für den Zeitpunkt von Winter- und Sommer-sonnenwende an.



Optik

Anthemios von Tralles (ca. 474 - ca. 534), der Erbauer der Hagia Sophia in Konstantinopel, schrieb eine Abhandlung über Brennspiegel. Darin bewies er, dass parallel einfallende Strahlen von einem parabolischen Spiegel im Brennpunkt gesammelt werden.

Quasta ibn Luqa (ca. 820 - ca. 912): "Die anschaulichste Wissenschaft ist die, an der Naturwissenschaft und Geometrie beide teilhaben, denn sie nimmt von der Naturwissenschaft die Sinneswahrnehmung, von der Geometrie die Beweise mit Hilfe der Linien. Ich habe nichts gefunden, wo diese beiden in einer schöneren Weise vereint erscheinen als in der Wissenschaft von den Strahlen, vor allem denen, die auf Spiegeln reflektiert werden."

Al-Briuni (973 – 1048): einer der bedeutendsten Gelehrten des Orients

Gerhard von Cremona (1117 – 1184): "De speculis comburentibus" ("Über

Brennspiegel”, in Toledo angefertigte Übersetzung eines Werks von Ibn al-Haitham)

Ibn al-Haitham, latinisiert *Alhazen* (um 965–1039/40): Die ”Alten” dachten, ein Sehstrahl würde vom Auge ausgehen und - ähnlich wie ein modernes Radar - die Umgebung abtasten. Alhazen ersetzt - nach sorgfältig durchgeführten optischen Experimenten - diesen Sehstrahl durch Kegel von Lichtstrahlen, die von den jeweiligen Objekten ausgehen, wobei jener Stahl, der die Augenlinse senkrecht trifft, als deren ”Repräsentant” angesehen wird.

Alhazen stellte Lesesteine aus Glas her - damit gilt er als Erfinder der Lupe.

Roger Bacon (1214 – 1292): In seinem Werk ”Opus Maius” (1267) erwähnt Bacon in Anlehnung an Alhazen u.a., dass Kugelsegmente gut für alterssichtige Leute seien.

Einem unbekanntem Tüftler gelang wenig später die Herstellung flacher leichter Gläser, die man dicht vor die Augen platzieren konnte. Der Dominikanermönch *Giordano de Revialto* erwähnte im Jahre 1300 in einer Predigt in Florenz beiläufig das epochale Ereignis: ”Es sind noch nicht zwanzig Jahre her, dass die Kunst der Verfertigung von Brillen, die besseres Sehen vermitteln, eine der nützlichsten Künste der Welt, erfunden wurde. Ich habe selbst denjenigen gesehen, der sie erfunden und zuerst fertigte, und mich mit ihm unterhalten.”

John Pacham (1220/25 – 1292): ”De Perspectiva communis” (um 1278)

Erazmus Ciolek Witelo (etwa 1230/35 – 1280/90): ”Perspectiva” (Erstdruck: 1535)

Unbekannter Mönch (kurz nach Witelo): Neues Werk über den parabolischen Spiegel mit dem Titel ”Speculi almukefi composito”

Johannes Werner (1468–1522): Werner zeigt, dass Licht durch einen parabolischen Spiegel fokussiert wird.

Friedrich Risner (um 1533 – 1580): ”Opticae Taurus” (1572, Übersetzung der Werke von Ibn al-Haitham und Erazmus Ciolek Witelo)

Das Titelpapier dieser Ausgabe zeigt die legendären archimedischen Brennspiegel, mit der die Verteidiger von Syrakus angeblich römische Schiffe in Brand setzten. Letzteres beruht aber auf einem Übersetzungsfehler.

Johannes Kepler (1571 – 1630): ”Paralipomena” (”Optica”, 1604), ”Dioptrice” (1611)

Bei seinen Forschungen über Linsen interessierte sich Kepler besonders für Krümmungskurven mit der Form von Kegelschnitten. Er prägte dabei den Begriff Brennpunkt. Kepler hatte überdies das Auge als Camera obscura erkannt und durch seine Beschäftigung mit dem Strahlengang durch dessen Linse ein Beispiel gegen das Dogma gefunden, dass Kreis und Kugel die perfekten Figuren seien, auf die sich die Physik stets stützen müsse.

Akustik

Athanasius Kircher (1602–1680): "Phonurgia Nova" (1673, 1684 in deutscher Sprache unter dem Titel "Neue Hall- und Tonkunst" erschienen). In beiden Werken hat Kircher viele anschauliche Darstellungen zu seinen Überlegungen und Untersuchungen publiziert, u.a. zur Schallreflexion in Räumen mit elliptischem Deckengewölbe.

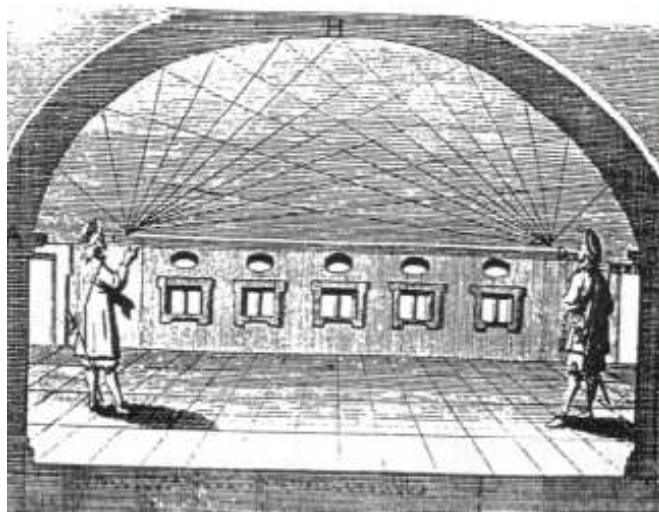


Abb. 1: Flüstergewölbe nach Athanasius Kircher

Architektur

Anmerkung 6 (Goldene Ellipse): Seien a, b die Längen der großen und kleinen Halbachse einer Ellipse und $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ihre Exzentrizität. Man spricht von einer *goldenen Ellipse*, wenn die Ellipse und der Kreis mit Radius e flächengleich sind, wenn also gilt

$$a \cdot b \cdot \pi = e^2 \cdot \pi,$$

bzw., gleichbedeutend, $\frac{b}{a} = \varepsilon^2 = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ und somit

$$\frac{b}{a} = \varepsilon^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Die Arena des Kolosseums in Rom hat nahezu die Form einer goldenen Ellipse (mit $a \cong 39.7 \text{ m}$, $b \cong 24.5 \text{ m}$ und somit $\frac{b}{a} = 0.61713$). Das Kolosseum selbst hat ebenfalls die Form einer Ellipse (mit $A \cong 94.55 \text{ m}$ und $B \cong 79.35 \text{ m}$).

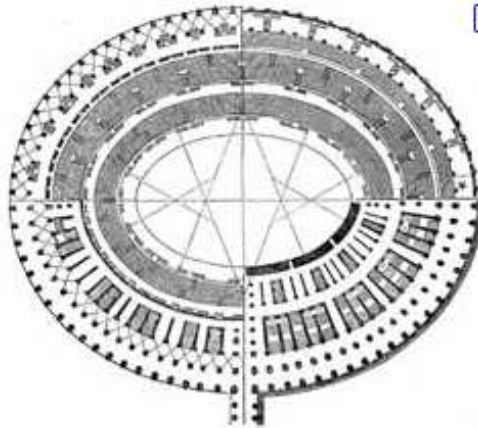


Abb. 2: Grundriss des Kolosseums, Rom

Iacopo Barozzi, genannt *Vignola* (1507 – 1573)



Abb. 3: Elliptische Treppe, Palazzo Boncompagnia, Vignola

Francesco Borromini (1599 – 1667)



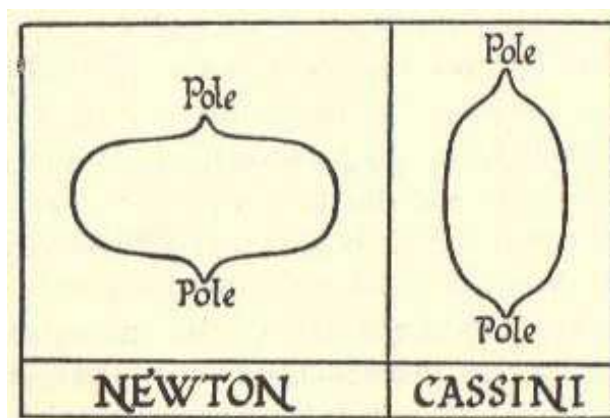
Abb. 4: Grabplatte in San Giovanni dei Fiorentini, Rom

Johann Bernhard Fischer von Erlach (1656–1723): Salzburg: Dreifaltigkeitskirche

Erdabplattung

Für lange Zeit war man der Ansicht, dass die Erde die Form einer Kugel habe. Ende des 17. Jahrhunderts wurde diese Ansicht in Zweifel gezogen und es gab zwei einander widersprechende Hypothesen. So schreibt der einflussreiche französische Autor *Voltaire* (1664 – 1778) anlässlich eines Aufenthalts in London im Jahre 1727 u.a.:

"A Frenchman in London finds things very different. ... In Paris you find the earth shaped like a melon, in London its flattened on two sides. ..."



Isaac Newton drückt seinen Standpunkt in seiner *Principia* wie folgt aus:

"The equal gravitation of the parts on all sides would give a spherical figure to the planets, if it was not for their diurnal revolution in a circle. By that circular motion it comes to pass that the parts receding from the axis endeavor to ascend about the equator; and therefore, if the matter is in a fluid state, by the ascent towards the equator it will enlarge the diameters there, and by its decent towards the poles it will shorten the axis."

In Frankreich, jedoch, wurden - zunächst unter Leitung von *Giovanni Domenico Cassini* (1625 – 1712) und später dessen Sohn *Jacques Cassini* (1677 – 1756) - mit viel Aufwand Messungen durchgeführt, um den Abstand von Breitenkreisen zu bestimmen; doch man kam schließlich zu keinem eindeutigen Resultat, zumal die geringen Unterschiede wegen der mangelnden Messgenauigkeit nicht schlüssig beurteilt werden konnten. Daher entschloss man sich in Paris, zwei Expeditionen durchzuführen, wobei eine den Abstand

zweier Breitenkreise in Lappland und die andere jenen im heutigen Ecuador messen sollte.

Diese beiden Expeditionen - in den Jahren 1736 bzw. 1735–1741 durchgeführt - führten schließlich zu dem Ergebnis, dass ein Grad des Meridianbogens in Äquatorialnähe (mit 110.61 km) kleiner als ein solcher in Polnähe (111.95 km) ist. Es bestätigte also Netwons Ansicht, wonach die Erde ein Rotationsellipsoid ist, welches an den Polen abgeplattet ist.

Schneidet man ein entsprechendes Rotationsellipsoid mit einer, die Rotationsachse enthaltende Ebene, so ist der Schnitt eine Ellipse mit Äquatorialradius a und Polradius $b < a$. Die sogenannte *Abplattung* (oder *Abflachung*) ist

$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{298.257\,234} = 0.003\,353$$

und die numerische Exzentrizität demnach

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)} = \sqrt{f(2-f)} = 0.081\,820.$$

3.5 Quadriken

3.5.1 Normalformtypen

Normalformtypen von Quadriken im \mathbb{R}^d :

- (1) $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0$
- (2) $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + 1 = 0$
- (3) $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1} = 0$

mit $0 \leq p \leq r \leq d$

Kegelschnitte ($d = 2$)

Ellipse: Typ (2): $r = 2, p = 0$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$$

Entartete Form 1: Typ (1): $r = 2, p = 0$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0 : \text{Punkt } (0, 0)$$

⁸Vgl. *Johann Linharts* Skriptum "Geometrie" [39], S. 121 und S. 124 – 127

Entartete Form 2: Typ (2): $r = 1, p = 0$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0 : \text{Paralleles Geradenpaar } y = \pm b$$

Hyperbel: Typ (2): $r = 2, p = 1$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$$

Entartete Form: Typ (1): $r = 2, p = 1$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 : \text{Schneidendes Geradenpaar (Asymptoten) } y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Parabel: Typ (3): $r = 1, p = 0$

$$y^2 - x = 0$$

Entartete Form: Typ (1): $r = 1, p = 0$

$$y^2 = 0 : \text{Doppelte Gerade}$$

3.5.2 Wiederholung zu Bewegungen (Isometrien) im \mathbb{R}^2

Euklidischer Abstand: Seien $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei Elemente des \mathbb{R}^2 . Dann ist deren Euklidischer Abstand bekanntlich

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)'(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Drehungen: Gegeben sei für ein $\alpha \in [-\pi, \pi)$ die Matrix

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Deren Determinante ist aufgrund des Pythagoräischen Lehrsatzes

$$|\mathbb{Q}| = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

und die transponierte Matrix \mathbb{Q}' von \mathbb{Q} ist zugleich deren inverse:

$$\mathbb{Q}'\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}.$$

Gemäß

$$\mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

liefert \mathbb{Q} eine Drehung um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn.

Anmerkung 1: Eine Drehung ist eine *Isometrie*, d.h. sie erhält den Abstand. Formal ausgedrückt: Es gilt

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)'(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = (\mathbb{Q}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))'(\mathbb{Q}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)).$$

Dies wegen

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))'(\mathbb{Q}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)' \mathbb{Q}'\mathbb{Q}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)' \mathbb{E}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)'(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Spezielle Drehungen:

Für unseren Zweck sind die Drehungen um $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$ (45°), um $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ (90°) und um $\alpha = \pm\pi$ (180°) wichtig. In diesen Fällen hat die Transformationsmatrix wegen

$$\begin{aligned} \cos(\pm\frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1 \quad \text{und} \\ \cos(\pm\pi) &= -1, \quad \sin(\pm\pi) = 0 \end{aligned}$$

die Gestalt

$$\mathbb{Q}(\pm\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Q}(\pm\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{Q}(\pm\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im letztgenannten Fall spricht man von einer *Spiegelung* am Ursprung.

Anmerkung 2: Wegen $\cos(-\beta) = \cos \beta$, $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ und der Summenformeln

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

ist das Nacheinanderausführen zweier Drehungen wieder eine Drehung:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\alpha)\mathbb{Q}(\pm\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pm\beta) & -\sin(\pm\beta) \\ \sin(\pm\beta) & \cos(\pm\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta & -(\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta) \\ \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha \pm \beta) & -\sin(\alpha \pm \beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) & \cos(\alpha \pm \beta) \end{pmatrix} = \mathbb{Q}(\alpha \pm \beta).\end{aligned}$$

Verschiebung (Translation): Sei $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein beliebiger 2-Vektor.

Dann ist

$$\mathbf{x} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

eine Verschiebung von \mathbf{x} um den Vektor \mathbf{b} .

Anmerkung 3: Wegen $\mathbf{x}_1 + \mathbf{b} - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ist eine Verschiebung offensichtlich eine Isometrie.

Proposition: Jede *eigentliche Bewegung*⁹ im \mathbb{R}^2 hat die Form

$$\mathbb{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

d.h. sie setzt sich aus einer Drehung \mathbb{Q} und einer Verschiebung zusammen, wobei $\mathbb{Q} = \mathbb{E}$ und/oder $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein können.

3.5.3 Quadriken

Die erste Untersuchung von Quadriken stammt von *Euler* (1748), die mit Hilfe von Eigenwerten von *Lagrange* (1788). Die Anwendung des von *Cayley* entwickelten Matrizenkalküls gestattet eine sehr bequeme Behandlung¹⁰.

"... the problem of the linear transformation of a quadratic function into itself has an elegant solution ..."

⁹Hinsichtlich der Definition des Begriffes der eigentlichen Bewegung und die Klassifikation der Isometrien im \mathbb{R}^2 sei auf Abschnitt 4.2 im Skriptum "Geometrie" von *Johann Linhart* verwiesen.

¹⁰*Leonhard Euler* (1707 – 1783), Schweizer Mathematiker;
Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), französischer Mathematiker;
Arthur Cayley (1821 – 1895), englischer Mathematiker

(Arthur Cayley, 1880)

"Über der hartnäckigen Verfolgung des vorgesetzten Weges haben aber die Quaternionisten tiefer liegende Probleme von wahrhaftem Interesse übersehen; ... Diese tiefere Einsicht verdanken wir Cayley. In *A Memoir on the Theory of Matrices* (Phil. Trans. 1858) entwickelt er ein Matrixkalkül. ..."

(Felix Klein, 1926)

Sei

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$$

eine symmetrische 2×2 -Matrix, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein 2-Vektor und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die zugehörige *Quadrik*

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = (Ax^2 + Bxy + Cy^2) + (ax + by) + c = 0.$$

Der erste Summand heißt *quadratische Form*, der zweite *lineare Form*.

Quadriken sind die analytische Darstellung von Kegelschnitten.

Einfachster Fall $A = C \neq 0$, $B = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= A(x^2 + y^2) + (ax + by) + c \\ &= A(x^2 + \frac{a}{A}x + y^2 + \frac{b}{A}y) + c \\ &= A((x + \frac{a}{2A})^2 + (y + \frac{b}{2A})^2) + c - \frac{a^2 + b^2}{4A} \end{aligned}$$

Falls $c_1 := \frac{a^2 + b^2}{4A} - c > 0$ ist, liegt ein **Kreis** mit Mittelpunkt $\mathbf{m} = -\frac{1}{2A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und Radius $R = \sqrt{\frac{c_1}{A}}$ vor. Wählt man als neue Koordinaten $(\mathbf{x} - \mathbf{m})/R$, so erhält die ursprüngliche Kreisgleichung schließlich die Form für den Einheitskreis.

Durch quadratisches Ergänzen erreichen wir also eine **Verschiebung (Translation)** des Kegelschnitts zum Ursprung des Koordinatensystems.

(Im Fall $c_1 = 0$ reduziert sich der Kreis auf den Mittelpunkt M .)

Im Fall $c_1 < 0$ gibt es keine reelle Lösung.)

Daher können wir uns im Wesentlichen darauf beschränken, den Spezialfall $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. eine Quadrik ohne lineare Form, nämlich

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + c = 0$$

zu untersuchen.

[**Motivation zur Klassifikation von Quadriken:** Die folgende erste Untersuchung von Quadriken legt nahe, dass die Größe $AC - (B/2)^2$ entscheidend für deren Klassifikation ist.

Gegeben sei die Quadrik

$$c_1 = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

mit $C > 0$ und $c_1 > 0$. Durch quadratisches Ergänzen erhält man

$$c_1 = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = C\left(y + \frac{B/2}{C}x\right)^2 + \frac{x^2}{C}(AC - (B/2)^2).$$

Ist nun $D := AC - (B/2)^2 > 0$, dann folgt

$$c_1 > C\left(y + \frac{B/2}{C}x\right)^2.$$

Daher liegt der Kegelschnitt innerhalb des Streifens

$$y = -\frac{B/2}{C}x \pm \sqrt{\frac{c_1}{C}}.$$

Es muss sich also um eine Ellipse handeln.

Andererseits gilt wegen

$$\frac{x^2}{C}(AC - (B/2)^2) = c_1 - C\left(y + \frac{B/2}{C}x\right)^2 \leq c_1$$

$\frac{x^2}{C}D \leq c_1$ oder, gleichbedeutend, $|x| \leq \sqrt{\frac{c_1 \cdot C}{D}}$. Also liegt die Ellipse auch innerhalb des Streifens

$$x = \pm \sqrt{\frac{c_1 \cdot C}{AC - (B/2)^2}}.$$

Anmerkung 1: Wegen $AC - (B/2)^2 > 0$ und $C > 0$ muss auch $A > 0$ sein. Quadratisches Ergänzen der Form

$$c_1 = A(x + \frac{B/2}{A}y)^2 + \frac{y^2}{A}(AC - (B/2)^2)$$

und analoges Vorgehen wie oben ergibt, dass die Ellipse auch innerhalb der beiden Streifen

$$x = -\frac{B/2}{A}y \pm \sqrt{\frac{c_1}{A}} \quad \text{und} \quad y = \pm \sqrt{\frac{c_1 \cdot A}{AC - (B/2)^2}}$$

liegt.]

Bestimmung der Eigenwerte von \mathbb{A} : Es ist

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{pmatrix} \right| &= (A - \lambda)(C - \lambda) - \left(\frac{B}{2}\right)^2 = \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - \left(\frac{B}{2}\right)^2 \\ &= \lambda^2 - (A + C)\lambda + D, \end{aligned}$$

wobei $D := |\mathbb{A}| = AC - (\frac{B}{2})^2$ die Determinanten von \mathbb{A} ist. Die beiden Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}(A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4D}) \\ &= \frac{1}{2}(A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}). \end{aligned} \tag{1}$$

Letzteres zumal gilt

$$(A + C)^2 - 4D = (A + C)^2 - 4(AC - (\frac{B}{2})^2) = (A - C)^2 + B^2.$$

Anmerkung 2: Wegen $(A - C)^2 + B^2 \geq 0$ sind beide Eigenwerte reell und es gilt somit

$$D \leq \left(\frac{A + C}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Da die beiden Eigenwerte die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind, gelten für sie selbstverständlich die Beziehungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C \quad \text{und} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = D.$$

Klassifikation von Quadriken: Für den zweiten Eigenwert gilt wegen (1)

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(A + C - \sqrt{(A + C)^2 - 4D}) \begin{cases} > 0 & D > 0 \\ = 0 & \text{falls } D = 0 \\ < 0 & D < 0. \end{cases}$$

Dies wird - nach Durchführung der Hauptachsentransformation - folgende Klassifikation der Quadriken zulassen: Abgesehen von entarteten Fällen definiert die Quadrik eine

Ellipse		$D > 0$	
Parabel	falls	$D = 0$	ist.
Hyperbel		$D < 0$	

Ein Kreis liegt genau dann vor, wenn in (2) Gleichheit gilt, also wenn gelten $A = C \neq 0$ und $B = 0$.

Abschließend geben wir eine Darstellung der Klassifikation, welche den schulischen Erfordernissen gerecht wird ¹¹.

◦ Ist $A \cdot C > 0$ (haben also A und C gleiches Vorzeichen), so kann - im Sinn der Charakterisierung mittels der Determinante $D = A \cdot C - (B/2)^2$ - jeder der drei Kegelschnitte vorliegen.

◦ Ist $A \cdot C = 0$, so liegt im Fall $B = 0$ (und $A \neq 0$ und $b \neq 0$ bzw. $C \neq 0$ und $a \neq 0$) eine Parabel und im Fall $B \neq 0$ eine Hyperbel vor,

◦ Ist $A \cdot C < 0$ (haben also A und C verschiedenes Vorzeichen), so liegt jedenfalls eine Hyperbel vor.

Hauptachsentransformation: Sei nun

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

die Matrix, die eine Drehung um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn beschreibt. Dann ist α so zu bestimmen, dass gilt

$$\mathbb{Q}' \mathbb{A} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

¹¹Um Trivialfälle auszuschließen sei mindestens eine der Größen A , B oder $C \neq 0$.

Wegen $A = \frac{A+C}{2} - \frac{C-A}{2}$, $C = \frac{A+C}{2} + \frac{C-A}{2}$ und $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ist

$$A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha = \frac{A+C}{2} - \frac{C-A}{2}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Aufgrund dessen und

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \quad \text{und} \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}'\mathbb{A}\mathbb{Q} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos \alpha + \frac{B}{2} \sin \alpha & -A \sin \alpha + \frac{B}{2} \cos \alpha \\ \frac{B}{2} \cos \alpha + C \sin \alpha & -\frac{B}{2} \sin \alpha + C \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha & (C-A) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{B}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ (C-A) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{B}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) & A \sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+C - (C-A)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2B \sin \alpha \cos \alpha & 2(C-A) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ 2(C-A) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) & A+C + (C-A)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+C - (C-A) \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha & (C-A) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha \\ (C-A) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha & A+C + (C-A) \cos 2\alpha - B \sin 2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+C + (B \sin 2\alpha - (C-A) \cos 2\alpha) & (C-A) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha \\ (C-A) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha & A+C - (B \sin 2\alpha - (C-A) \cos 2\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2} & 0 \\ 0 & A+C \mp \sqrt{(A-C)^2 + B^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt erfordert ein genaues Studium der Lösung der Gleichung

$$(C-A) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = 0, \quad (3)$$

und den Nachweis der Tatsache, dass diese

$$B \sin 2\alpha - (C-A) \cos 2\alpha = \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2} \quad (4)$$

impliziert (womit der Nachweis von $\mathbb{Q}'\mathbb{A}\mathbb{Q} = \mathbb{D}$ abgeschlossen sein wird). Beides nimmt im Folgenden einen breiten Raum ein. Wir beginnen mit

Anmerkung 3: Ist 2α eine Lösung von (3), dann ist auch $2(\alpha \pm \frac{\pi}{2})$ eine Lösung - allerdings bei Vertauschung von λ_1 und λ_2 , denn wegen $\cos(2\alpha \pm \pi) = -\cos 2\alpha$ und $\sin(2\alpha \pm \pi) = -\sin 2\alpha$ gilt einerseits

$$(C-A) \sin(2\alpha \pm \pi) + B \cos(2\alpha \pm \pi) = -((C-A) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha) = 0$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\lambda_1(2\alpha \pm \pi) &= A + C + (B \sin(2\alpha \pm \pi) - (C - A) \cos(2\alpha \pm \pi)) \\ &= A + C - (B \sin 2\alpha - (C - A) \cos 2\alpha) = \lambda_2(2\alpha).\end{aligned}$$

Somit gibt es mit $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ vier Lösungen, nämlich die Lösungen $\alpha \pm k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \{0, 1, 2\}$: Gilt für $k = 0$ $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dann auch für $k = 2$.

Für $k = 1$ gilt für beiderlei Vorzeichen jedoch $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Lösungen $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Bei der Lösung von (3) haben wir die Fälle $A = C$ und $A \neq C$ zu unterscheiden.

Fall $C = A, B \neq 0$: In diesen Fall ist (3) gleichbedeutend mit $\cos 2\alpha = 0$ und hat somit die Lösung $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Weiters gilt wegen $\sin 2\alpha = 1$ (4), nämlich

$$B \sin 2\alpha - (C - A) \cos 2\alpha = B,$$

und somit in der Tat $\lambda_{1,2} = A \pm \frac{B}{2}$. Die Anstiege der Achsen des Kegelschnitts sind - sofern dieser kein Kreis ist -

$$k_{1,2} = \pm 1$$

und die Transformationsmatrix ist wegen $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathbb{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & A \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \frac{B}{2} & 0 \\ 0 & A - \frac{B}{2} \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & x_1 + y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & A \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = (A + \frac{B}{2})x_1^2 + (A - \frac{B}{2})y_1^2.$$

Spezialfall $C = A = 0$, $B \neq 0$ (**Rechtwinkelige oder gleichseitige Hyperbel**): Für den Fall

$$B \cdot xy + c = 0$$

liegt eine sogenannte rechtwinkelige oder gleichseitige Hyperbel (rectangular hyperbola) vor. Diese entspricht im Fall einer Ellipse dem Kreis.

Fall $C \neq A$: Sei $q = \frac{B}{A-C}$. Dann ist (3) gleichbedeutend mit

$$\tan 2\alpha = q. \quad (3')$$

Wegen Anmerkung 3 können wir somit annehmen:

$$\alpha := \alpha(q) = \frac{1}{2} \arctan q \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Daher gilt

$$\cos \alpha(q) > 0 \quad \forall q \quad \text{und} \quad \sin \alpha(q) \begin{cases} < 0 & \text{für } q < 0 \\ = 0 & \text{für } q = 0 \\ > 0 & \text{für } q > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Auffindung der Lösung von (3'): Im Hinblick auf

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

und $x := \tan \alpha$ erhält Gleichung (3') die Form

$$\frac{q}{2} = \frac{x}{1 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad qx^2 + 2x - q = 0$$

zu lösen. Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind bekanntlich $x_{1,2}(q) = \frac{1}{q}(-1 \pm \sqrt{1 + q^2})$, wobei gilt

$$x_1(q) \cdot x_2(q) = -1, \quad (6)$$

wie man mit Hilfe von $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ leicht verifiziert.

Da die Funktion $q \mapsto x_1(q)$ im Hinblick auf (5) aber streng monoton wachsend (und deren Grenzwert für $q = 0$ gleich 0) sein muss, gilt

$$\tan \alpha = x_1(q) = \frac{1}{q}(\sqrt{1 + q^2} - 1).$$

Somit sind die Anstiege der Achsen des Kegelschnitts

$$k_{1,2}(q) = x_{1,2}(q) = \frac{1}{q}(-1 \pm \sqrt{1+q^2}) .$$

Anmerkung 4: Bekanntlich gilt

$$(\sqrt{1+q^2} - 1)/|q| < 1 \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

mit $\lim_{|q| \rightarrow \infty} (\sqrt{1+q^2} - 1)/|q| = 1$.

Wegen (6) ist

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \alpha &= 1 + x_1^2(q) = 1 + \left(\frac{1}{x_2(q)}\right)^2 = 1 + \left(\frac{q}{\sqrt{1+q^2} + 1}\right)^2 \\ &= \frac{2(1+q^2 + \sqrt{1+q^2})}{(\sqrt{1+q^2} + 1)^2} = \frac{2\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+q^2} + 1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}} \end{aligned}$$

und folglich

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\right) .$$

Somit gilt im Hinblick auf (5)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}}$$

und

$$\sin \alpha = \text{signum}(q) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \text{signum}(q) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}} .$$

Zusammenfassend ist also wegen $q = \frac{B}{A-C}$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{B}{A-C})^2}}} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \text{signum}\left(\frac{B}{A-C}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{B}{A-C})^2}}} .$$

Nachweis von (4): Es ist

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$$

und

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \operatorname{signum}(q) \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}} = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Somit gilt tatsächlich (4), nämlich

$$\begin{aligned} B \sin 2\alpha - (C - A) \cos 2\alpha &= (A - C) (q \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = (A - C) \left(q \cdot \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \right) \\ &= (A - C) \sqrt{1+q^2} = \frac{A - C}{|A - C|} \cdot \sqrt{(A - C)^2 + B^2}. \end{aligned}$$

Folgerung (Hauptachsentransformation): Sei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{Q}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{Q}' \mathbb{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die Matrix $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \mathbb{Q}' \mathbb{A} \mathbb{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2. \end{aligned}$$

Fall einer Parabel ($D = 0$): Gemäß (1) ist

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (A + C \pm (A + C))$$

und somit $\lambda_1 = A + C$ und $\lambda_2 = 0$ bzw.

$$\mathbb{Q}' \mathbb{A} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} A + C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verschiebung (Translation) durch quadratisches Ergänzen: Wegen

$$\mathbb{Q}' \mathbb{A} \mathbb{Q} = \mathbb{D} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{A} = \mathbb{Q} \mathbb{D} \mathbb{Q}'$$

und mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathbb{Q}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und

$$\mathbf{c}' = \mathbf{b}' \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \mathbf{c} = \mathbb{Q}' \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ -a \sin \alpha + b \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbb{Q} \mathbb{D} \mathbb{Q}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}' \mathbb{Q} \mathbb{Q}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \mathbb{D} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{c}' \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c \\
&= (\lambda_1 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot y_1^2) + (a_1 x_1 + b_1 y_1) + c.
\end{aligned}$$

Da wir die gemischten Terme bereits eliminiert haben, können wir analog wie im einfachsten Fall ($A = C \neq 0$ und $B = 0$) vorgehen und durch quadratisches Ergänzen eine Verschiebung des Kegelschnitts zum Ursprung des Koordinatensystems erreichen.

Fall $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ (Ellipse oder Hyperbel): Wir setzen die obigen Umformungen fort:

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda_1 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot y_1^2) + (a_1 x_1 + b_1 y_1) + c \\
&= \lambda_1 \cdot \left(x_1^2 + \frac{a_1}{\lambda_1} x_1\right) + \lambda_2 \cdot \left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_2} y_1\right) + c \\
&= \lambda_1 \cdot \left(x_1 + \frac{a_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \cdot \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_2}\right)^2 + c - \frac{1}{4} \left(\frac{a_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_1^2}{\lambda_2}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

und erreichen damit, sofern die Quadrik nicht entartet ist, dass der Kegelschnitt in diesem Koordinatensystem den Mittelpunkt

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} := -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1/\lambda_1 \\ b_1/\lambda_2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Sei nun

$$c_1 := \frac{1}{4} \left(\frac{a_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_1^2}{\lambda_2}\right) - c \neq 0,$$

Letzteres, damit der Kegelschnitt nicht degeneriert ist.

Dann ist (7) gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\lambda_1}{c_1} \cdot (x_1 - m_1)^2 + \frac{\lambda_2}{c_1} \cdot (y_1 - m_2)^2 \\
&= \text{signum}\left(\frac{\lambda_1}{c_1}\right) \left(\frac{x_1 - m_1}{\sqrt{|c_1/\lambda_1|}}\right)^2 + \text{signum}\left(\frac{\lambda_2}{c_1}\right) \left(\frac{y_1 - m_2}{\sqrt{|c_1/\lambda_2|}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Die Größen $\sqrt{|c_1/\lambda_1|}$ und $\sqrt{|c_1/\lambda_2|}$ sind die Länge der großen bzw. der kleinen Halbachse der Ellipse bzw. Hyperbel. Der Mittelpunkt des Kegelschnitts im ursprünglichen Koordinatensystem ist $\mathbb{Q}\mathbf{m}$ und die beiden Achsen sind

$$\mathbb{Q}\mathbf{m} + t\mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}\mathbf{m} + t\mathbb{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fall $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 = 0$ (Parabel): Damit dieser Fall nicht entartet ist, setzen wir zudem $b_1 < 0$ voraus. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \cdot x_1^2 + (a_1 x_1 + b_1 y_1) + c \\ &= \lambda_1 \cdot \left(x_1^2 + \frac{a_1}{\lambda_1} x_1\right) + b_1 y_1 + c \\ &= \lambda_1 \cdot \left(x_1 + \frac{a_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_1 \left(y_1 + \frac{1}{b_1} \left(c - \frac{a_1^2}{4\lambda_1}\right)\right). \end{aligned}$$

Also liegt ein Parabel vor, die in diesem Koordinatensystem den Mittelpunkt

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} := - \begin{pmatrix} a_1/2\lambda_1 \\ (c - a_1^2/4\lambda_1)/b_1 \end{pmatrix}$$

besitzt. Deren Scheitel \mathbf{s} im ursprünglichen Koordinatensystem ist demnach

$$\mathbf{s} = \mathbb{Q}\mathbf{m}$$

und deren Symmetrieachse

$$\mathbf{s} + t\mathbb{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In den Koordinaten $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{m})/\sqrt{\lambda_1}$ erhält die obige Parabelgleichung die Form

$$x_2^2 = 2p y_2,$$

wobei der Parameter der Parabel $p = -\frac{b_1}{2\sqrt{\lambda_1}}$ ist.

(Der Fall $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 > 0$ wird analog behandelt.)

3.6 Hüllkurven und Krümmung

3.6.1 Hüllkurven einer Geradenschar

Definiere $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ eine Kurve im \mathbb{R}^2 und $\lambda(t)$ die Funktion, welche den Anstieg der Geraden

$$y(x, t) = y(t) + \lambda(t) \cdot (x - x(t)), \quad t \geq 0$$

im Punkt $(x(t), y(t))$ beschreibt. Unsere Absicht ist, die Hüllkurve dieser Geradenschar zu bestimmen.

Entscheidend dabei ist folgender **Merksatz**:

”Der Limes der Schnittpunkte einer festen Geraden der Geradenschar mit immer enger benachbarten Geraden dieser Schar ist ein Punkt der Hüllkurve.”

Vorgangsweise: Wir schneiden die Gerade

$$y(x, t) = y(t) + \lambda(t) \cdot (x - x(t))$$

mit einer eng benachbarten Geraden

$$y(x, t + \Delta t) = y(t + \Delta t) + \lambda(t + \Delta t) \cdot (x - x(t + \Delta t)) \quad \text{mit} \quad 0 < \Delta t \ll 1.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\equiv y(x, t + \Delta t) - y(x, t) \\ &= y(t + \Delta t) - y(t) + (\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)) \cdot x \\ &\quad - (\lambda(t + \Delta t) x(t + \Delta t) - \lambda(t) x(t)) \\ &= y(t + \Delta t) - y(t) + (\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)) \cdot x \\ &\quad - ((\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)) x(t + \Delta t) + \lambda(t) (x(t + \Delta t) - x(t))), \end{aligned}$$

bzw. nach Division durch Δt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \frac{\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)}{\Delta t} \cdot x \\ &\quad - \left(\frac{\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)}{\Delta t} x(t + \Delta t) + \lambda(t) \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

und durch Grenzübergang für $\Delta t \downarrow 0$ schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= y'(t) + \lambda'(t) \cdot x - (\lambda'(t) \cdot x(t) + \lambda(t) \cdot x'(t)) \\ &= \lambda'(t) \cdot (x - x(t)) - \lambda(t) \cdot x'(t) + y'(t). \end{aligned}$$

Dies ergibt für die x -Koordinate des zugehörigen Punktes der Hüllkurve

$$x = x(t) + \frac{\lambda(t) \cdot x'(t) - y'(t)}{\lambda'(t)}$$

bzw., mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\psi(t) := \frac{\lambda(t) \cdot x'(t) - y'(t)}{\lambda'(t)},$$

$$x = x(t) + \psi(t).$$

Für die y -Koordinate ergibt sich somit

$$\begin{aligned} y &= y(t) + \lambda(t) \cdot (x - x(t)) \\ &= y(t) + \lambda(t) \cdot \psi(t). \end{aligned}$$

Abbildung zu Aufgabe 54: Die Parabel als Hüllkurve ihrer Tangenten (aus [28], Abschnitt 6.4 Hüllkurven)

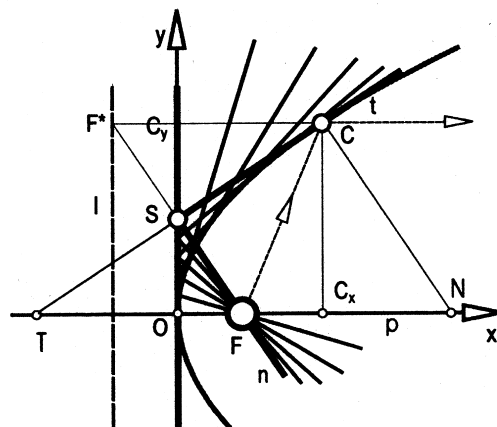


Abb. 6.45 Parabel als Hüllkurve

Beispiel 1: Die Kaustik¹²

Mein Bruder, Professor in Basel, hat die Gelegenheit wahrgenommen, etliche Kurven zu untersuchen, welche die Natur uns täglich vor Augen führt.

¹² Johann Bernoulli: "Caustica circularis radiorum parallelorum"

Johann Bernoulli (1692)

Aus Symmetriegründen reicht es, die Hüllkurve in der obere Halbebene zu bestimmen. Für den Radius des Kreises wählen wir o.B.d.A. $r = 1$.

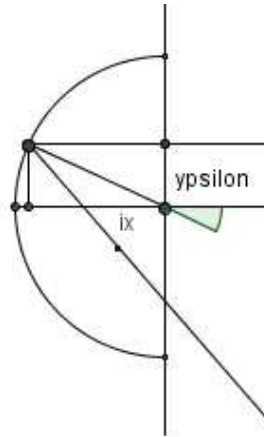


Abb. 1: Zur Parametrisierung der Kaustik

$$x(\varphi) = -\cos \varphi, \quad x'(\varphi) = \sin \varphi$$

$$y(\varphi) = \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = \cos \varphi$$

$$\lambda(\varphi) = -\tan 2\varphi, \quad \lambda'(\varphi) = -\frac{2}{\cos^2 2\varphi}$$

Wegen

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi \quad \text{und} \quad \cos 2\varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi$$

ist

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= \frac{\lambda(\varphi) \cdot x'(\varphi) - y'(\varphi)}{\lambda'(\varphi)} \\ &= -\frac{\cos^2 2\varphi}{2} ((-\tan 2\varphi) \cdot \sin \varphi - \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi + \cos \varphi \right) \cos^2 2\varphi \\ &= \frac{1}{2} (\sin \varphi \cdot \sin 2\varphi + \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi) \cos 2\varphi \\ &= \frac{1}{2} (2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi + \cos \varphi \cdot (1 - 2 \sin^2 \varphi)) (1 - 2 \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \cos(\varphi) \cdot (1 - 2 \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}x &= x(\varphi) + \psi(\varphi) \\&= -\cos \varphi \cdot \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varphi\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}y &= y(\varphi) + \lambda(\varphi) \cdot \psi(\varphi) \\&= \sin(\varphi) - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - 2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot (1 - 2 \sin^2 \varphi) \\&= \sin(\varphi) \cdot (1 - \cos^2 \varphi) = \sin^3(\varphi).\end{aligned}$$

Also gilt wegen

$$y^{1/3} = \sin \varphi$$

$$x = -\sqrt{1 - y^{2/3}} \cdot \left(\frac{1}{2} + y^{2/3}\right).$$

Aus Symmetriegründen gilt daher

$$x(y) = -\sqrt{1 - |y|^{2/3}} \cdot \left(\frac{1}{2} + |y|^{2/3}\right).$$

Anmerkung 1: Die Kaustik besitzt also im Punkt $(-\frac{1}{2}, 0)$ eine Spitze.

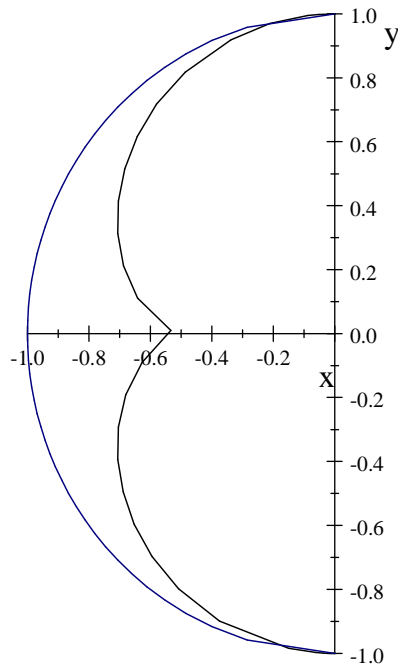


Abb. 2: Abbildung der Kaustik

Beispiel 2: Die Evolute¹³ der Parabel oder die Neilesche Parabel¹⁴

Wir betrachten den oberen Ast der Parabel

$$y^2 = 2px ,$$

denn das Ergebnis für den unteren Ast erhält man aus dem für den oberen durch Vertauschung des Vorzeichens.

Als Parameter wählen wir den Anstieg t der Tangente an die Parabel, welcher bekanntlich $\frac{p}{y}$ ist. Da die y -Koordinate und die x -Koordinate des Punktes der Parabel somit

$$y(t) = \frac{p}{t} \quad \text{bzw.} \quad x(t) = \frac{p}{2t^2}$$

¹³Eine *Evolute* einer Kurve ist die Hüllkurve der Schar der Normalen an diese Kurve bzw. der Geometrische Ort der Mittelpunkte ihrer Krümmungskreise. Die Evolute eines Kreises ist somit dessen Mittelpunkt.

¹⁴*William Neile* (1637 – 1670), englischer Mathematiker

sind, ist die Gleichung der Normalen im Punkt $(x(t), y(t))$

$$y(x, t) = \frac{p}{t} + \left(-\frac{1}{t}\right)\left(x - \frac{p}{2t^2}\right) = \frac{p-x}{t} + \frac{p}{2t^3}.$$

Im Weiteren folgen wir der allgemeinen Vorgangsweise:

$$x(t) = \frac{p}{2t^2}, \quad x'(t) = -\frac{p}{t^3}$$

$$y(t) = \frac{p}{t}, \quad y'(t) = -\frac{p}{t^2}$$

$$\lambda(t) = -\frac{1}{t}, \quad \lambda'(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{\lambda(t) \cdot x'(t) - y'(t)}{\lambda'(t)} \\ &= t^2 \cdot \left(\left(-\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{p}{t^3}\right) - \left(-\frac{p}{t^2}\right)\right) \\ &= p\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} x &= x(t) + \psi(t) \\ &= \frac{p}{2t^2} + p\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = p\left(1 + \frac{3}{2t^2}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y &= y(t) + \lambda(t) \cdot \psi(t) \\ &= \frac{p}{t} - \frac{1}{t}p\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = -\frac{p}{t^3}. \end{aligned}$$

Also ist wegen

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\left(\frac{x}{p} - 1\right)\right)^{1/2} &= \frac{1}{t} \quad \text{und} \quad \frac{y}{p} = -\frac{1}{t^3} \\ y &= -p\left(\frac{2(x-p)}{3p}\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Neilschen Parabel ist somit

$$y(x) = \mp p\left(\frac{2(x-p)}{3p}\right)^{3/2} \quad \text{für } x \geq p.$$

Anmerkung 2: Der Krümmungsradius im Scheitelpunkt der Parabel ist somit p .

Abbildung 3: Die Neilesche Parabel ($p = 1$) :

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{2x} && \dots \text{ Parabel} \\ y &= \mp\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)^{3/2} && \dots \text{ Hüllkurve} \end{aligned}$$

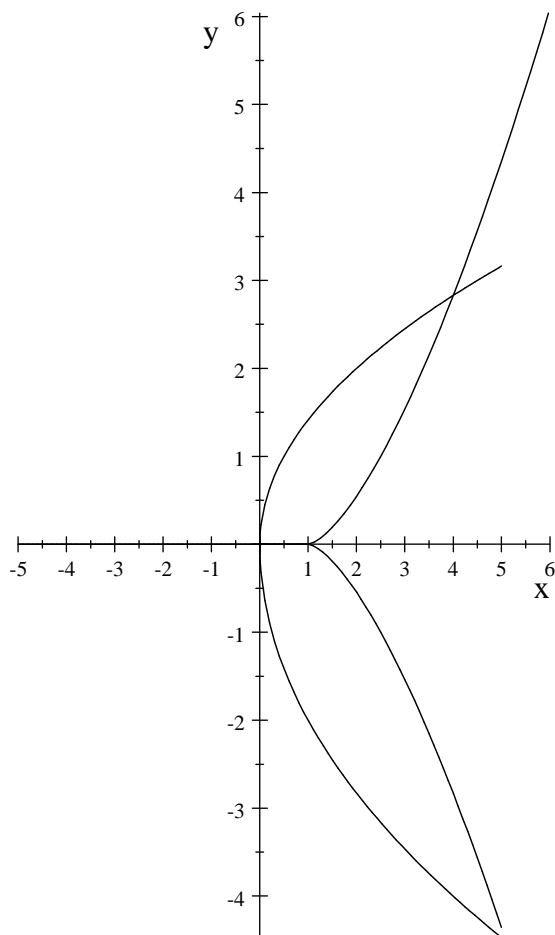
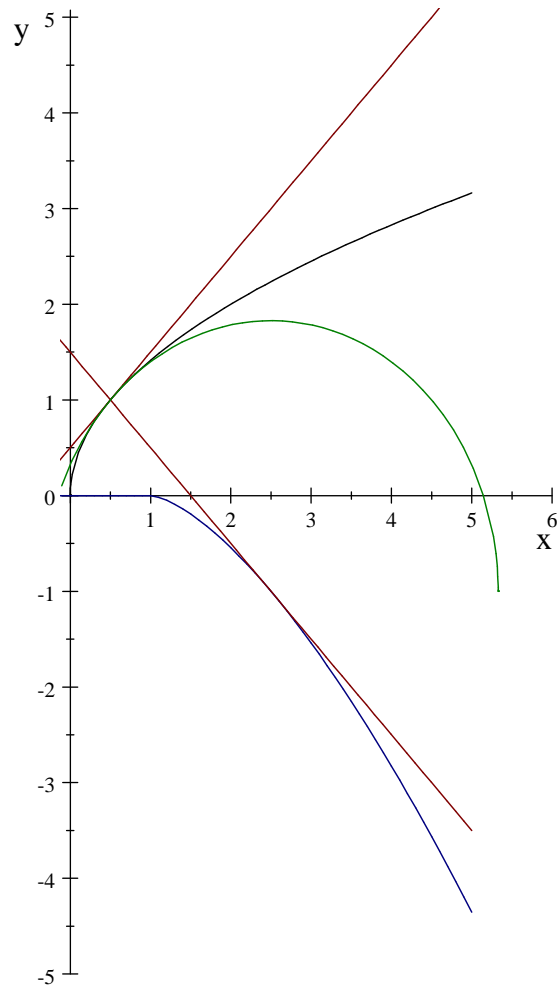


Abbildung 4: Ein Krümmungskreis für die Parabel (für $p = 1$ und $t = 1$) :

$$\begin{aligned}
 y \left(= \frac{1}{2t} + tx \right) &= \frac{1}{2} + x && \dots \text{ Tangente} \\
 y \left(= \frac{p-x}{t} + \frac{p}{2t^3} \right) &= \frac{3}{2} - x && \dots \text{ Normale} \\
 y &= \sqrt{8 - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} - 1 && \dots \text{ Berührkreis}
 \end{aligned}$$



3.6.2 Krümmungsradius und Krümmung

"There are few Problems concerning Curves more elegant than this, or that give greater Insight into their nature."

(Isaak Newton, 1671)

Der Krümmungsradius zu einem Punkt einer KurveTangente im Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, f(x_0))$:

$$y_t(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Zugehörige Normale:

$$y_n(x, x_0) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Wir schneiden diese Normale mit einer geringfügig benachbarten Normalen ($0 < \Delta x_0 < 1$). Dies ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\equiv y_n(x, x_0 + \Delta x_0) - y_n(x, x_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0 + \Delta x_0)}(x - (x_0 + \Delta x_0)) + \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) + \frac{\Delta x_0}{f'(x_0 + \Delta x_0)} - \left(\frac{1}{f'(x_0 + \Delta x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right)(x - x_0) \end{aligned}$$

und somit nach Division durch Δx_0

$$0 = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} + \frac{1}{f'(x_0 + \Delta x_0)} - \left(\frac{\frac{1}{f'(x_0 + \Delta x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}}{\Delta x_0}\right)(x - x_0).$$

Grenzübergang für $\Delta x_0 \downarrow 0$ liefert wegen

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx_0} \frac{1}{f'(x_0)} &= \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2} \\ 0 &= f'(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} + \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}(x - x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f'(x_0)} + \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}(x - x_0). \end{aligned}$$

Dies liefert für die x -Koordinate des Berührungspunktes der Normalen auf deren Hüllkurve

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f'(x_0)} \cdot \frac{f'(x_0)^2}{f''(x_0)} = x_0 - \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0).$$

Für die zugehörige y -Koordinate ergibt sich somit

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)}.$$

Das Quadrat des Abstands der Punkte

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, f(x_0)) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_1 = \left(x_0 - \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0), f(x_0) + \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)}\right)$$

ist daher

$$\rho^2(x_0) = \left(\frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0)\right)^2 + \left(\frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)}\right)^2 = \frac{(f'(x_0)^2 + 1)^3}{(f''(x_0))^2}$$

Der Radius des Krümmungskreises in dem zum Punkt \mathbf{x}_0 zugehörigen Punkt \mathbf{x}_1 der Hüllkurve der Normalenschar ist daher

$$\rho(x_0) = \frac{(f'(x_0)^2 + 1)^{3/2}}{|f''(x_0)|}.$$

Anmerkung 1: Liegt die Kurve $(x, f(x))$ in der parametrischen Form $(x(t), y(t))$ vor, so gilt wegen

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

und somit

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) / \frac{dx}{dt} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^3}$$

für den Radius des Krümmungskreises

$$\rho(t) = \frac{((\frac{y'(t)}{x'(t)})^2 + 1)^{3/2} \cdot x'(t)^3}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|} = \frac{(y'(t)^2 + x'(t)^2)^{3/2}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}.$$

Definition: Sei f eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion mit stetiger zweiter Ableitung. Weiters sei

$$\varphi(x) = \arctan(f'(x))$$

der zum Anstieg $f'(x)$ gehörige Winkel $\varphi(x)$ und

$$s(x) = \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

die einschlägige Bogenlänge. Dann heißt die Größe

$$\kappa(x) = \frac{d\varphi}{ds}(x)$$

die *Krümmung* der Funktion f im Punkt $(x, f(x))$.

Anmerkung 2: Wegen

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

gilt

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \frac{d\varphi}{ds}(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{ds(x)} = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \\ &= \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Somit ist der Krümmungsradius $\rho(x)$ im Punkt $(x, f(x))$ der Kehrwert des Absolutbetrags der Krümmung

$$\rho(x) = \frac{1}{|\kappa(x)|}.$$

Anmerkung 3: Ist die Funktion $f(t) = (x(t), y(t))$ so gegeben, dass sie den Weg beschreibt, den ein Massenpunkt in der Zeit t mit konstanter Geschwindigkeit $\|\dot{f}\| := \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 1$ durchläuft¹⁵, dann folgt aus

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 1$$

durch Differentiation

$$\dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) + \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = 0, \text{ also } \ddot{f}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \perp \dot{f}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

oder, kurz, $\ddot{f} \perp \dot{f}$. Daher ist die Beschleunigung \ddot{f} , also die Änderungsrate des Geschwindigkeitsvektors - welche sich aus der Änderungsrate

(a) des Betrages und (b) der Richtung

¹⁵Die Notation, die Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt zu bezeichnen, geht auf *Isaak Newton* (1643 – 1727) zurück.

zusammensetzt - ausschließlich durch die Richtungsänderung des Tangentenvektors bestimmt. Daraus kann man folgern, dass $|\kappa(t)|$ proportional zum Betrag der Kraft ist, die aufgewendet werden muss, um den Massenpunkt auf der Bahn zu halten. Für eine detaillierte Ausführung sei auf Abschnitt (1.7) "Krümmung ebener Kurven" in [38] verwiesen.

Beispiel 1: Krümmungsradien der Parabel

$$y^2 = 2px$$

Wir beschränken uns o.B.d.A. auf die obere Halbebene. Somit ist $y_0 = f(x_0) = \sqrt{p}(2x_0)^{1/2}$ und wegen

$$f'(x_0) = \sqrt{p}(2x_0)^{-1/2} \quad \text{und} \quad -f''(x_0) = \sqrt{p}(2x_0)^{-3/2}$$

folglich

$$\begin{aligned} \rho(x_0) &= \frac{((f'(x_0))^2 + 1)^{3/2}}{|f''(x_0)|} = \frac{(\frac{p}{2x_0} + 1)^{3/2}}{\sqrt{p}(2x_0)^{-3/2}} = \frac{(p + 2x_0)^{3/2}}{\sqrt{p}} \\ &= p(1 + \frac{2x_0}{p})^{3/2}, \quad x_0 \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Der Krümmungsradius im Scheitelpunkt ist mit $x_0 = 0$ daher

$$\rho(0) = p.$$

Anmerkung 4: Die Parabel hat folgende sehr bemerkenswerte Eigenschaft, welche schon *Pappos von Alexandria* bekannt war:

Gegeben seien eine Parabel \mathcal{P} mit Leitlinie l , P ein beliebiger Punkt von \mathcal{P} und t die Tangente in P . Dann ist die Entfernung d des Punktes P von der Leitlinie l in Richtung der Normalen zu t genau halb so groß, wie der Krümmungsradius ρ in P (vgl. [19], "Appolonius von Perga und die Geometrie eines Schwarzen Loches", S. 152-156).

Anmerkung 5: Der Krümmungsradius der Parabel von Beispiel 1 ist, in Abhängigkeit von $y_0 = \pm\sqrt{2px_0}$ dargestellt,

$$r_1(y_0) = p(1 + (\frac{y_0}{p})^2)^{3/2}.$$

Lässt man diese Parabel um ihre Leitlinie rotieren, so sind die *Hauptkrümmungsradien* der erzeugten Rotationsfläche gemäß Anmerkung 4

$$r_1(y_0) \quad \text{und} \quad r_2(y_0) = \frac{r_1(y_0)}{2}.$$

Die *Gaußsche Krümmung* dieser Rotationsfläche ist daher gleich

$$-\frac{1}{r_1(y_0)} \cdot \frac{1}{r_2(y_0)} = -\frac{2}{p^2(1 + (\frac{y_0}{p})^2)^3}.$$

Lässt man die Parabel hingegen um ihre Achse (die x -Achse) rotieren, so ist die erzeugte Rotationsfläche ein sogenanntes Rotationsparaboloid. Ein Hauptkrümmungsradius ist $r_1(x_0) = \rho(x_0)$. Der zweite ist die Entfernung des Punktes $P = (x_0, y_0)$ vom Schnittpunkt der zugehörigen Normalen mit der x -Achse. Da die Länge der Subnormalen des Punktes P gleich y_0/p ist, ist $r_2(x_0)$ aufgrund des Pythagoräischen Lehrsatzes

$$r_2(x_0) = \sqrt{y_0^2 + (y_0/p)^2} = y_0 \sqrt{1 + 1/p^2} = \sqrt{2px_0(1 + 1/p^2)}$$

und dessen Gaußsche Krümmung ist daher

$$+\frac{1}{r_1(x_0)} \cdot \frac{1}{r_2(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{2x_0(1 + 1/p^2)}(p + 2x_0)^{3/2}}.$$

Für den Fall, dass die Mittelpunkte der Krümmungskreise auf ein und derselben Seite der Rotationsfläche liegen, ist die Gaußsche Krümmung nämlich positiv, andernfalls ist sie negativ.

Beispiel 2: Krümmungsradien der Ellipse ¹⁶

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Wir beschränken uns o.B.d.A. auf die obere Halbebene. Somit ist $y_0 = f(x_0) = b\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2}$. Also ist für $x_0 \in (-a, a)$

$$-f'(x_0) = \frac{b}{a} \frac{\frac{x_0}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2}}$$

und wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \frac{x \cdot \frac{x}{a^2}}{(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2)^{3/2}}$$

¹⁶Eine interessante Ergänzung zu diesem Beispiel ist Abschnitt 4.3.3 "Die Astroide als Evolute der Ellipse" der Diplomarbeit [43] von Frau *Rechberger*.

$$f''(x_0) = \frac{b}{a^2} \frac{1}{(1 - (\frac{x_0}{a})^2)^{3/2}}.$$

Der Krümmungsradius der Ellipse im Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, f(x_0))$ ist daher

$$\begin{aligned} \rho(x_0) &= \frac{(f'(x_0)^2 + 1)^{3/2}}{|f''(x_0)|} = \frac{a^2}{b} \left(\left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{(\frac{x_0}{a})^2}{1 - (\frac{x_0}{a})^2} + 1 \right)^{3/2} (1 - (\frac{x_0}{a})^2)^{3/2} \\ &= \frac{a^2}{b} \left(\left(\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right) \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 + 1 \right)^{3/2}, \quad x_0 \in [-a, a]. \end{aligned}$$

Anmerkung 6: Wegen $\frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{a} ((\frac{b}{a})^{-2})^{3/2}$ gilt folgende äquivalente Darstellung

$$\rho(x_0) = \frac{b^2}{a} \left(\frac{1 - (1 - (\frac{b}{a})^2)(\frac{x_0}{a})^2}{(\frac{b}{a})^2} \right)^{3/2}, \quad x_0 \in [-a, a].$$

Anmerkung 7: Für einen Kreis mit Radius r ist der Krümmungsradius in jedem Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, f(x_0))$ daher in der Tat gleich r .

Der Krümmungsradius des Scheitelkrümmungskreises im Punkt $\mathbf{x}_0 = (0, b)$ ist - gemäß der ersten Darstellung - somit

$$R := \rho(0) = \frac{a^2}{b}$$

und der im Punkt $\mathbf{x}_0 = (a, 0)$ gemäß Anmerkung 6

$$\rho(a) = \frac{b^2}{a} = l.$$

Anmerkung 8: Die Krümmungsradien der Ellipse sind als Funktion der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$

$$l = \frac{b^2}{a} = a \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^2 = a(1 - \varepsilon^2) = a(1 - \varepsilon) \cdot (1 + \varepsilon) > a(1 - \varepsilon) = SF_1$$

bzw.

$$R = \frac{a^2}{b} = b \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{b}{1 - \varepsilon^2} > b.$$

Anmerkung 9: Für Ellipse bzw. Hyperbel

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 \pm \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

sind die Formeln für den Krümmungsradius im Punkt (x_0, y_0)

$$\begin{aligned}\rho(x_0) &= \frac{a^2}{b} \left(\left(\left(\frac{b}{a} \right)^2 \mp 1 \right) \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 \pm 1 \right)^{3/2} \\ &= \frac{b^2}{a} \left(\frac{\left(\left(\frac{b}{a} \right)^2 \mp 1 \right) \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 \pm 1}{\left(\frac{b}{a} \right)^2} \right)^{3/2}, \quad x_0 \in \begin{cases} [-a, a] & \text{für die Ellipse} \\ \mathbb{R} \setminus (-a, a) & \text{für die Hyperbel.} \end{cases}\end{aligned}$$

Vom Definitionsbereich abgesehen unterscheiden sich die Formeln demnach nur in den Vorzeichen.

Anmerkung 10: Der Krümmungsradius des Scheitelkrümmungskreises der Hyperbel im Punkt $\mathbf{x}_0 = (a, 0)$ ist somit - gemäß der zweiten Darstellung -

$$\rho(a) = \frac{b^2}{a} = l \quad \text{mit} \quad l = a(\varepsilon^2 - 1) .$$

3.6.3 Ausblick: Traktrix und Kettenlinie

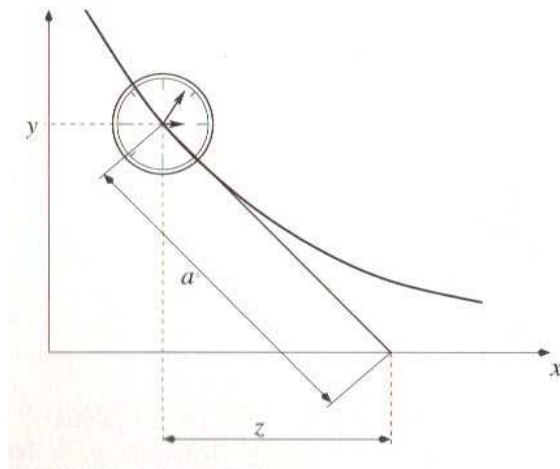
Der berühmte Pariser Anatom und Architekt *Claude Perrault* (1613 – 1688) formulierte folgende Aufgabe:

Für welche Kurve hat die Tangente in jedem Punkt P von diesem zur x -Achse den konstanten Abstand a ?

Er illustrierte diese Kurve, *Traktrix* oder *Schleppkurve* genannt, indem er seine kostbare Taschenuhr an einem Faden fester Länge über einen Tisch zog.

Im Hinblick auf die nachstehende Abbildung gilt folgende Beziehung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad y \in (0, a) .$$



Anmerkung 1: Wie *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1717) im Jahre 1693 gezeigt hat - und man unschwer nachprüft -, hat die Traktrix die folgende analytische Darstellung

$$x_a(y) = \pm \int_y^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \mp a \left(\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}}{\frac{y}{a}} \right).$$

Definition: Seien $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Kettenlinie mit dem Parameter $a > 0$ durch die Funktion

$$y_K(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

definiert.

Anmerkung 2: Wegen $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$ gilt

$$y'_K(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Behauptung: Die Evolute der Traktrix

$$x_a(y) = \mp a \left(\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}}{\frac{y}{a}} \right), \quad y \in (0, a]$$

ist die Kettenlinie.

Beweis: Mit $(x_T, y_T) = (x_a(t), t)$ und

$$x_a(t) = -a\left(\sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2} + \ln\left(\frac{a}{t} - \sqrt{\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1}\right)\right)$$

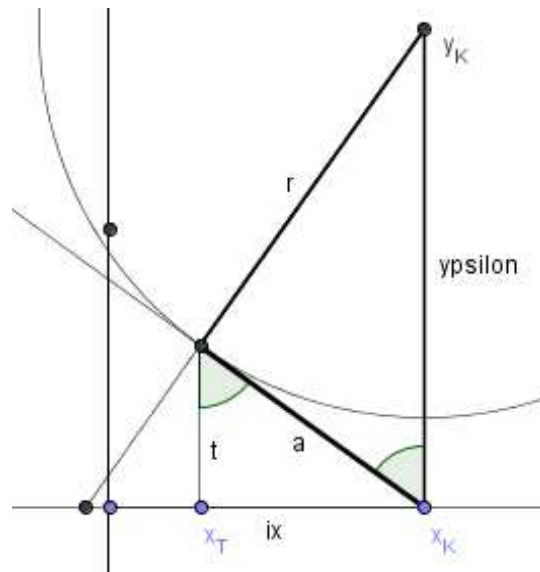
gilt, wie wir aus der definierenden Differentialgleichung wissen, $x'_a(t) = -\sqrt{\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1}$ und daher

$$x''_a(t) = \frac{\left(\frac{a}{t}\right)^2}{t\sqrt{\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1}}.$$

Also ist der Krümmungsradius im Punkt $(x_a(t), t)$

$$\begin{aligned} \rho_a(t) &= \frac{(x'_a(t)^2 + 1)^{3/2}}{|x''_a(t)|} = \frac{\left(\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1 + 1\right)^{3/2}}{\left(\frac{a}{t}\right)^2} \cdot t\sqrt{\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1} \\ &= a\sqrt{\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{t}\right)^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (0)$$

Die letzte Formel zeigt, dass der Krümmungsradius die Länge der linken Kathete des fett berandeten rechtwinkligen Dreiecks in der nachstehenden Abbildung ist.



Darüber hinaus liest man ab, dass

$$y = \frac{a^2}{t}$$

die y -Koordinate des Mittelpunkts des Krümmungskreises und

$$x = x_a(t) + a\sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2} = -a \ln\left(\frac{a}{t} - \sqrt{\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1}\right)$$

seine x -Koordinate sind. Aus den beiden obigen Formeln ergibt sich

$$-\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{y}{a} - \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right),$$

und folglich

$$e^{-x/a} = \frac{y}{a} - \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}. \quad (1)$$

Nun ist

$$\left(\frac{y}{a} - \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right)\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) = 1$$

und somit

$$\ln\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) = -\ln\left(\frac{y}{a} - \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) = \frac{x}{a},$$

bzw.

$$e^{x/a} = \frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}. \quad (2)$$

Addiert man die rechten bzw. linken Seiten von (2) und (1) und multipliziert dann mit $\frac{a}{2}$, so erhält man schließlich

$$y = a \cdot \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Subtrahiert man hingegen die rechten bzw. linken Seiten von (1) von jenen von (2) und multipliziert dann mit $\frac{a}{2}$, so erhält man schließlich wegen (0)

$$\rho_a = a\sqrt{\left(\frac{a}{t}\right)^2 - 1} = a \cdot \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right). \quad \square$$

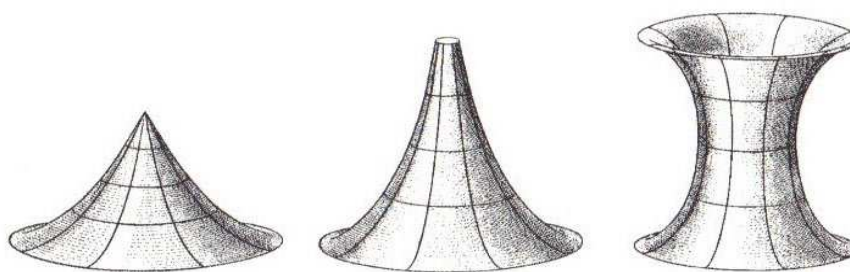
Anmerkung 4: Rotiert man einen Kreis mit Radius r um eine Achse durch seinen Mittelpunkt, so entsteht bekanntlich eine Kugel, welche ein Rotationskörper mit konstanter positiver *Gaußscher Krümmung* $\varkappa = \frac{1}{r^2}$ ist.

Rotiert man hingegen die Traktrix um die x -Achse, so entsteht ein Rotationskörper, der wegen der Beziehung (3) die konstante negative Gaußsche Krümmung

$$\kappa = -\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{1}{a^2}$$

besitzt. Solche Rotationskörper nennt man *Pseudosphären*; unsere spezielle ein *Traktroid*, welches bereits am Ende des 18. Jahrhunderts bekannt war.

Die folgende Abbildung, welche *Felix Kleins* "Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie" [3] entnommen ist, zeigt solche Pseudosphären. Die mittlere ist das durch Rotation der Traktrix (für $x > 0$) erzeugte Traktroid.



Chapter 4

Ausblick

4.1 Anmerkungen zur Axiomatik

Euklid unterscheidet im I. Buch seiner "Elemente" zwischen Definitionen, Postulaten und Axiomen.

Beispiele für **Definitionen** sind Aussagen wie *"Ein Punkt ist, was keine Teile hat"* oder *"Eine Linie breitlose Länge"*.

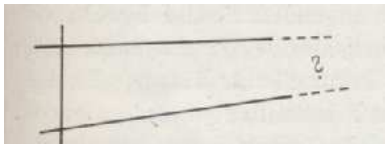
Beispiele für **Axiome** *"Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich"* oder *"Wenn Gleiches Gleichem hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich"*.

Von anderer Art sind die fünf **Postulate**:

"Es soll gefordert sein:

- 1. Daß man von jedem Punkt zu jedem Punkt die Strecke ziehen kann,*
- 2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,*
- 3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis ziehen kann,*
- 4. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,*
- 5. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei Geraden bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind."*

Die folgende Skizze illustriert das 5. Postulat:



Das fünfte Postulat heißt auch *Parallelenaxiom*. Im Wesentlichen besagt es, dass zwei gerade Linien der Ebene, die nicht parallel sind, immer einen Schnittpunkt besitzen.

Euklid versucht, alle geometrischen Sätze auf Grund dieser Postulate und der (eentlichen) Definitionen rein logisch, nur unter Benützung gewisser Schlussregeln, zu beweisen. Historisch gesehen war das eine großartige Leistung, und die Bücher des Euklid wurden etwa 2000 Jahre lang als mustergültig hinsichtlich Klarheit und logischer Strenge angesehen. Sie fanden weite Verbreitung an Schulen und Universitäten.

Aus heutiger Sicht müssen wir allerdings feststellen, dass die Vorgangsweise von Euklid keineswegs unseren Ansprüchen an logischer Strenge gerecht wird. Er verwendet in Wirklichkeit bei seinen Beweisen stillschweigend eine ganze Reihe von Annahmen, die er in seinen Definitionen und Postulaten nicht formuliert. Das erste einwandfreie Axiomensystem zur Grundlegung der Geometrie stammt von *David Hilbert* (1862 – 1943), nach wesentlichen Vorarbeiten von *Moritz Pasch* (1843 – 1930).

Das fünfte Postulat von Euklid ist sichtlich länger und komplizierter als die anderen und auch nicht so unmittelbar klar. Schon Euklid hatte daher versucht, so weit wie möglich ohne dieses Postulat auszukommen. Der aus dem südирakischen Basra stammende Gelehrte *Ibn al-Haitham* (um 965–1039) hat den Begriff der Parallelität zweier (verschiedener) Geraden, welche bei Euklid dadurch definiert ist, dass sie keinen Schnittpunkt haben, durch deren Äquidistanz ersetzt. Später haben eine Reihe von namhaften Mathematikern (z.B. *Giovanni Girolamo Saccheri* (1667 – 1733), *Johann Lambert* (1728 – 1777), *Adrien-Marie Legendre* (1752 – 1833)) versucht, die Aussage des Parallelenaxioms aus den anderen Postulaten herzuleiten. Scheinbar gelang das auch immer wieder, allerdings wurde jedesmal stillschweigend etwas vorausgesetzt, was zum Parallelenaxiom äquivalent ist. Die Vorgangsweise war häufig so, dass man versuchte, aus der Negation des Parallelenaxioms einen Widerspruch zu den anderen Postulaten herzuleiten.

Erst als man Ende des 18. Jahrhunderts die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms nachweisen konnte, war der Weg frei für anderen Geometrien: Ziemlich genau um das Jahr 1823 erkannten unabhängig voneinander drei große Mathematiker die Möglichkeit einer in sich widerspruchsfreien "Geometrie", in der das Parallelenaxiom nicht gilt.

Diese waren:

der Deutsche *Carl Friedrich Gauß* (1777 – 1855),

der Ungar *János Bolyai* (1802 – 1860) und

der Russe *Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski* (1792 – 1856)

Es ist bemerkenswert, dass der Schotte *John Playfair* (1748 – 1819) schon vor dem Jahre 1823 folgenden Standpunkt vertritt:

Gegeben sei eine Gerade und ein Punkt, welcher nicht auf dieser Geraden liegt. Dann gibt es

- genau eine Gerade, die den Punkt enthält und die parallel zur gegebenen Geraden ist (Euklidische oder Parabolische Geometrie)
- mehr als eine Gerade, die den Punkt enthält und die parallel zur gegebenen Geraden ist (Hyperbolische Geometrie)
- keine Gerade, die den Punkt enthält und die parallel zur gegebenen Geraden ist (Elliptische Geometrie).

Wenn man sich von der Vorstellung löst, welche man typischerweise mit dem Begriff "Gerade" verbindet und so flexibel mit dem Begriff umgeht, dass man einen Großkreis auf einer Kugel als "Gerade" ansieht¹ und man überdies je zwei dem Mittelpunkt der Kugel gegenüberliegende Punkte identifiziert, so hat man ein einfaches Beispiel dafür, dass zwei "anfänglich parallele Gerade" einander schneiden und somit offenkundig Euklids Parallelenaxiom nicht gehorchen: Zeichnet man einen Großkreis auf der Kugel als "Äquator" aus, dann schneiden einander zwei verschiedene Großkreise, welche normal zum Äquator sind - auf der Erde nennen wir diese Längengrade - in den "Polen".

Entscheidend dabei sind:

- einerseits der Begriff der Normalität (des rechten Winkels) und

¹Jedenfalls ändert jemand, der sich auf einem Großkreis vorwärts bewegt, auf der Kugel seine Richtung nicht.

Gerade und Großkreis sind Beispiele für sogenannte *geodätische Linien* oder *Geodäten* der Ebene bzw. der Kugeloberfläche. Eine *geodätische Linie* ist - vage ausgedrückt - die "lokal" kürzeste Verbindungskurve zweier Punkte.

◦ andererseits eine gewisse Großzügigkeit bei der Interpretation der Begriffe "Gerade" und "Punkt".

Tatsächlich haben die von Hilbert verwendeten Begriffe "Punkt", "Gerade", "Ebene" etc. keinen Bezug zur Anschauung mehr, wie es noch Euklid versucht hatte (z.B. "Ein Punkt ist, was keine Teile hat"), sondern sind rein axiomatisch definiert. So wird Hilbert der Ausspruch zugeschrieben, man könne statt "Punkt, Gerade und Ebenen" jederzeit auch "Tisch, Bänke und Bierseidel" sagen; es komme nur darauf an, dass die Axiome erfüllt sind.

Erst nach der Verbreitung der Werke von *Lobatschewski* und der Veröffentlichung der Werke von *Gauß* und *Bernhard Riemanns* (1826 – 1866) Antrittsvorlesung (1854) geraten die nichteuklidischen Geometrien in den Brennpunkt mathematischen Interesses.

So erbingt der italienische Mathematiker *Eugenio Beltrami* (1835 – 1900) im Jahre 1868 den Nachweis, dass die beiden nichteuklidischen Geometrien konsistent in dem Sinne sind, wie es die euklidische ist.

Felix Klein (1849 – 1925) gelingt 1871 die Synthese verschiedener Standpunkte, die er durch die Entdeckung des elliptischen nicht-euklidischen Raumes vollendet. Dieser wird im Rahmen von *Albert Einsteins* (1879 – 1955) allgemeiner Relativitätstheorie (1916) zu Anwendung kommen.

Auch die Bezeichnung "hyperbolische Geometrie" stammt von *Felix Klein*, wie auch sein sogenanntes "Bierdeckelmodell" derselben.

Es ist bemerkenswert, dass die hyperbolischen Geometrien (durch *Gauß* gewiss vor 1816, *Bolyai* 1823 und *Lobatschewski* 1826) vor der elliptischen Geometrie (durch *Riemann* 1854) entdeckt wurden. So hießen ursprünglich die hyperbolische Geometrie *nichteuklidische Geometrie erster Art* und die elliptische Geometrie *nichteuklidische Geometrie zweiter Art*.

Nachtrag zum Parallelenaxiom

Ein besseres Verständnis für das Wesen von *Euklids* fünftem Postulat erhält man durch einen Vergleich mit anderen Postulaten, welche - unter der Annahme der Gültigkeit der ersten vier Postulate - schließlich als mit dem fünften äquivalent erkannt wurden:

1. Für eine gegebene Gerade g und einem Punkt P , der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade durch P in der Ebene von g und P , die g nicht schneidet (*John Playfair*, 1778 – 1819).

4.2. HYPERBOLISCHE GEOMETRIE: POINCARÉ'S KREISMODELL 111

2. Parallele Gerade sind äquidistant (*Ibn al-Haitham*, um 965 – 1039).
3. Die Winkelsumme jedes Dreiecks beträgt zwei rechte Winkel (180^0) (*Giovanni Girolamo Saccheri*, 1667 – 1733).
4. Zu jedem Dreieck gibt es ein ähnliches Dreieck beliebiger Größe (*John Wallis*, 1616 – 1703).
5. Durch drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte gibt es einen Kreis (*Farkas Bolyai*, 1775 – 1856).
6. Das Verhältnis von Umfang und Durchmesser ist für alle Kreise - unabhängig von ihrer Größe - gleich (π).
7. Es gilt der Pythagoräische Lehrsatz.

Wir beschäftigen uns abschließend mit *Henri Poincaré* (1854 – 1912) Kreismodell der hyperbolischen Geometrie aus dem Jahre 1882, zumal dieses besonders gut nachvollziehbar ist.

4.2 Hyperbolische Geometrie: Poincaré's Kreismodell

Poincaré wählt als Raum das Innere $\overset{\circ}{K}$ des Einheitskreises \mathcal{K} in der Ebene. Die "Punkte" sind die gewöhnlichen Punkte von $\overset{\circ}{K}$. Unter einer "Geraden" verstehen wir aber jetzt den in $\overset{\circ}{K}$ liegenden Teil

- eines gewöhnlichen Kreises oder
- einer gewöhnlichen Geraden,

welcher, bzw. welche \mathcal{K} rechtwinkelig schneidet.

Auch die Winkel sind im üblichen Sinn zu verstehen. Die folgende Abbildung ist analog zur der Illustration des Parallelenaxioms (auf Seite 106) und zeigt anschaulich, dass in diesem Modell das 5. Postulat von *Euklid* nicht gilt.

(Der Kreis \mathcal{K} ist strichliert.)

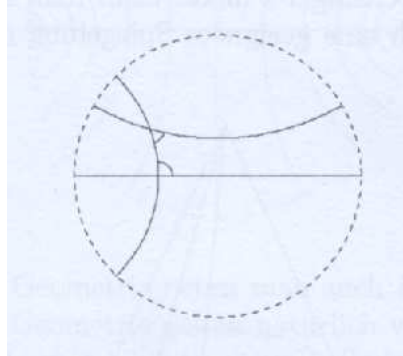


Abb. 1: Abbildung zu Poincarés Kreismodell

Um ein gutes Verständnis vom Poincaréschen Kreismodell zu erhalten, sind die Abschnitte 4.2.1 und 4.2.3 wesentlich. Abschnitt 4.2.2 ist hingegen als Ergänzung gedacht.

4.2.1 Der Areatangens hyperbolicus

Dies ist die Inverse des *Tangens hyperbolicus*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wegen $-1 < \tanh x < 1$ sei $t \in (-1, 1)$ angenommen. Dann ist

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = t \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}(1 - t) = 1 + t$$

und somit

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}.$$

Definition: Die durch

$$\operatorname{ar} \tanh x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

4.2. HYPERBOLISCHE GEOMETRIE: POINCARÉ'S KREISMODELL 113

definierte Funktion heißt *Areatangens hyperbolicus*.

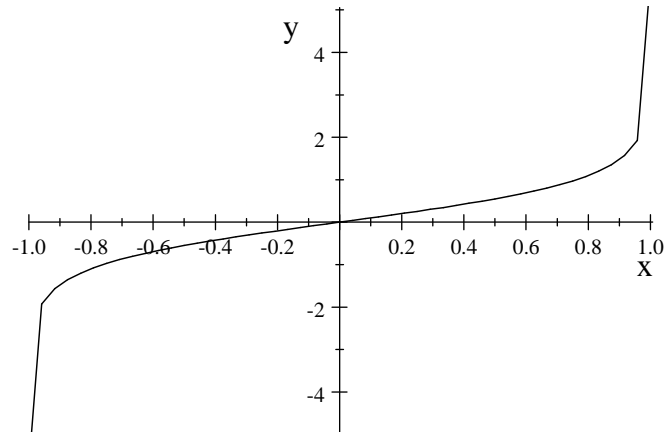


Abb. 1: $x \mapsto \operatorname{ar} \tanh x$, $x \in (0, 1)$

Mit Hilfe des Areatangens hyperbolicus lässt sich eine Metrik auf dem Intervall $(-1, 1)$ definieren: Seien $x, y \in (-1, 1)$ und

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 2 |\operatorname{ar} \tanh x - \operatorname{ar} \tanh y| = \left| \log \frac{1+x}{1-x} - \log \frac{1+y}{1-y} \right| \\ &= \left| \log \frac{(1+x) \cdot (1-y)}{(1-x) \cdot (1+y)} \right|. \end{aligned}$$

Anmerkung 1: Eine Metrik d erfüllt bekanntlich folgende drei Eigenschaften:

- (i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y$ ist,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y$ und
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z$.

Behauptung 1: Die oben definierte Funktion d ist tatsächlich eine Metrik auf $(-1, 1)$.

Ad (ii): Die Symmetrie ist eine unmittelbare Folgerung des Absolutbetrages.

Ad (i): $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$ gilt ebenfalls wegen des Absolutbetrages.

Sei $c > 0$. Dann ist

$$\frac{(1+x) \cdot (1-y)}{(1-x) \cdot (1+y)} = c \quad \Leftrightarrow \quad 1+x-y-xy = c(1+y-x-xy)$$

bzw., gleichbedeutend,

$$(c-1)(xy-1) + (c+1)(x-y) = 0. \quad (1)$$

Nun ist $d(x, y) = 0$ gleichbedeutend mit $c = 1$ und dies impliziert wegen (1) $y = x$.

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Metrik ist die folgende: je näher am Rand des Intervalls $[-1, 1]$ sich zwei Punkte x und y befinden, umso kleiner ist gewissermaßen die Einheit, mit der ihr Abstand gemessen wird:

Sei $I(x) = [x - 0.05, x + 0.05]$ das Intervall der Länge 0.1 mit Mittelpunkt $x \in [-0.95, 0.95]$. Dann ist

$$\delta(x) := d(x - 0.5, x + 0.05) = \left| \log \frac{(1 + (x - 0.05)) \cdot (1 - (x + 0.05))}{(1 - (x - 0.05)) \cdot (1 + (x + 0.05))} \right|$$

die Länge des Intervalls $I(x)$ im Sinn der Metrik d . Eine Darstellung der Funktion δ findet man in Abbildung 2.

Anmerkung 2: Die Gleichung (1) ist für $c \neq 1$ die Gleichung einer rechtwinkligen Hyperbel, welche

- (a) die Symmetrieachse $y = -x$,
- (b) den Mittelpunkt $\mathbf{m} = \frac{c+1}{c-1}(1, -1)$ und
- (c) den Parameter $a = \frac{2\sqrt{2}c}{|c-1|}$ besitzt.

(d) Ferner gehören die Punkte $(-1, -1)$ und $(1, 1)$ für alle $c \neq 1$ der Hyperbel an.

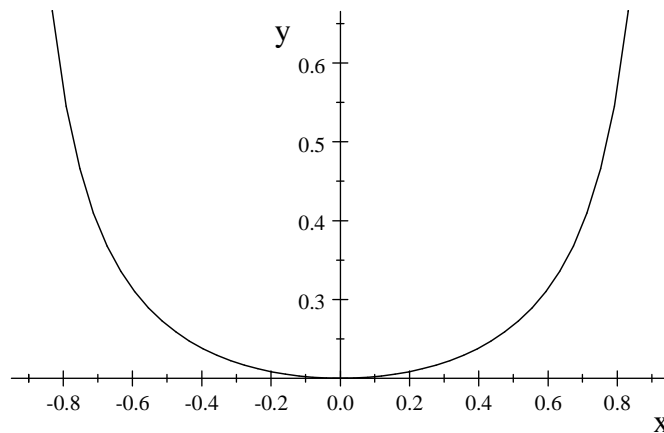


Abb. 2: $x \mapsto \delta(x)$, $x \in [-0.95, 0.95]$

Anmerkung 3: Wegen $(x, y) \in [-1, 1]^2$ ist in unserem Zusammenhang lediglich jener Teil der Hyperbel von Interesse, welcher in diesem Quadrat liegt.

Im Fall $c > 1$ liegt die Hyperbel im Dreieck $\Delta_u = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 : y \leq x\}$ und der betreffende Ast der Hyperbel ist konvex,

im Fall $c < 1$ liegt die Hyperbel im Dreieck $\Delta_o = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 : y \geq x\}$ und der betreffende Ast der Hyperbel ist konkav.

Ersetzt man c durch $1/c$, so geht der Hyperbelast für $1/c$ aus dem für c durch Spiegelung an der Gerade $y = x$ hervor.

Dementsprechend haben die Kurven $\{(x, y) \in [-1, 1]^2 : d(x, y) = |\log c|\}$, $c > 0$ gleichen Abstands die Form von bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrischen konvexen Linsen (siehe Abbildung 3).

Anmerkung 4: Man kann d gemäß

$$d(x, y) = \left| \log \left(\frac{1+x}{1-x} : \frac{1+y}{1-y} \right) \right|$$

auch mit Hilfe des Doppelverhältnisses ²

$$\frac{(1+x)}{(1-x)} : \frac{(1+y)}{(1-y)} = \frac{|c-a|}{|b-c|} : \frac{|d-a|}{|b-d|}$$

der vier Punkte $a = -1$, $b = 1$, $c = x$ und $d = y$ des Intervalls $[-1, 1]$ aus-

²Der Begriff des Doppelverhältnisses ist in der Projektiven Geometrie von entscheidender Bedeutung.

drücken.

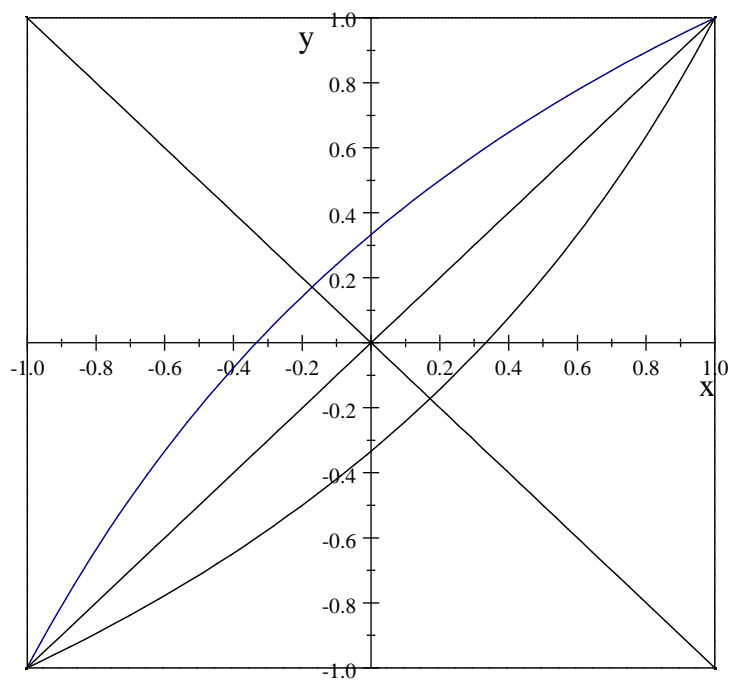


Abb. 3: $xy - 1 + 3(x - y) = 0$, $xy - 1 - 3(x - y) = 0$

4.2.2 Der Cosinus hyperbolicus

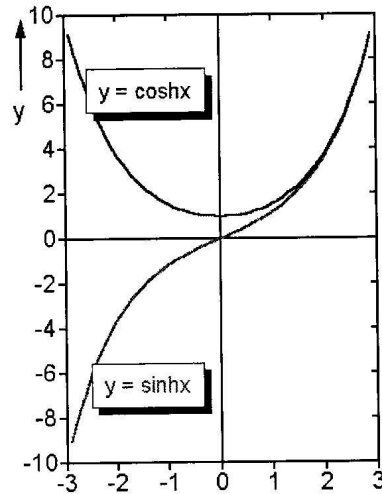
Es sind

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Anmerkung 1: Der Graph der Funktion $y = a \cosh(x/a)$, $x \in \mathbb{R}$ ($a > 0$), hat die Form einer durchhängenden homogenen Kette. Daher wird er auch

4.2. HYPERBOLISCHE GEOMETRIE: POINCARÉ'S KREISMODELL 117

als *Kettenlinie* bezeichnet.



Analog zum Additionssatz der Cosinusfunktion gilt

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

denn die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} r &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4} ((e^{x+y} + e^{-(x+y)}) + e^{x-y} + e^{y-x}) + (e^{x+y} + e^{-(x+y)} - (e^{x-y} + e^{y-x})) \\ &= \frac{1}{2} (e^{x+y} + e^{-(x+y)}). \end{aligned}$$

Für $y = -x$ gilt im Hinblick auf $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$ und $\cosh 0 = 1$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Das bedeutet, dass die Punkte $(\cosh t, \sinh t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ liegen.

Behauptung 1: Die Inverse des rechten Asts des Cosinus hyperbolicus ist

$$\operatorname{Ar} \cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty).$$

Sie heißt *Areacossinus hyperbolicus*.

Beweis: Es ist

$$\frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = t \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 + 1 = 2t \cdot e^x,$$

bzw.

$$(e^x)^2 - 2t \cdot e^x + 1 = 0.$$

Sei nun $y = e^x$. Dann gilt wegen $x \geq 0$ $y = e^x \geq 1$. Von den beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $y^2 - 2t \cdot y + 1 = 0$

$$y = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

kommt daher nur $y = t + \sqrt{t^2 - 1}$ in Frage und es gilt somit

$$x(t) = \log(t + \sqrt{t^2 - 1}).$$

Anmerkung 2: Im Fall der Winkelfunktionen gilt für

$$(\cos t, \sin t)$$

bekanntlich analog $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Im Fall $t \in [0, 2\pi]$ interpretiert man den Parameter t üblicherweise als Bogenlänge des Winkels t auf dem Einheitskreis³. Man könnte den Parameter $t \in [0, \pi]$ jedoch gleichermaßen als die Fläche eines Kreissektors des Einheitskreises mit dem Öffnungswinkel $2t$ interpretieren.

Im Fall der Hyperbelfunktionen lässt sich der Parameter t nur als Fläche interpretieren, wie der Name *Area* (Fläche) in der Bezeichnung *Areacossinus hyperbolicus* verrät.

Behauptung 2: Gegeben sei die Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Weiters sei $x \geq 1$ und $y(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ der Hyperbelast im ersten Quadranten. Dann ist das 2-Fache der Fläche F jener Teilmenge des Dreiecks $\Delta = (0, 0), (x, 0), (x, y(x))$, welche oberhalb der x -Achse und der Hyperbel liegt, gleich

$$2F = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

³Der Name der inversen Funktion der Winkelfunktion des *Cossinus*, beispielsweise, heißt bekanntlich *Arcussinus* und Arcus steht für Bogen.

4.2. HYPERBOLISCHE GEOMETRIE: POINCARÉ'S KREISMODELL 119

Beweis: Wir gehen von der rechtwinkligen Hyperbel

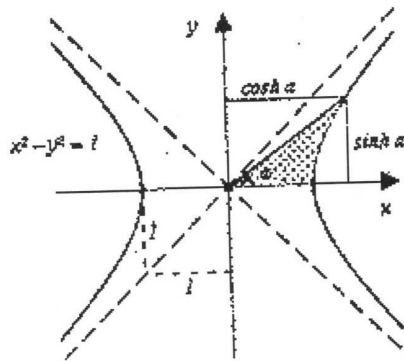
$$y = \frac{1}{x}$$

aus und nehmen $x > 1$ an. Dann ist bekanntlich ⁴

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x.$$

Die durch die Strecke $(0,0), (1,1)$ und die Hyperbel von oben und die Strecke $(0,0), (x, \frac{1}{x})$ von unten begrenzte Fläche F ist daher ebenfalls

$$F = \frac{1}{2} + \ln x - x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} = \ln x.$$



Anmerkung 3: Für die Hyperbel $y = \frac{1}{2x}$ gilt entsprechend $\int_{1/\sqrt{2}}^{x/\sqrt{2}} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln x$.

Geht man von der Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 1$$

aus, so wird der Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{x^2 - 1} \end{pmatrix}$$

⁴Diese Einsicht geht auf den belgischen Jesuit *Gregorius a Santo Vincentio* (1584–1669) zurück, welcher die Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \quad x, y > 0$$

erkannt hat.

mit Hilfe der Matrix

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in den Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{x^2 - 1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x + \sqrt{x^2 - 1} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \end{pmatrix}$$

übergeführt und die entsprechende Hyperbelgleichung erhält die Form

$$x_1 \cdot y_1 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{2}.$$

Somit ist das 2-Fache der Fläche der Teilmenge des Dreiecks

$$\Delta : (0, 0), (x, 0), (x, -\sqrt{x^2 - 1}),$$

welche unterhalb der x -Achse und der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ liegt, gleich

$$2F = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

4.2.3 Spiegelung am Kreis

Gegeben sei ein Kreis \mathbf{k} mit Mittelpunkt \mathbf{m} und Radius r und weiters ein Punkt \mathbf{p} außerhalb von \mathbf{k} . Dann heißt die Gerade durch die Berührungspunkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 der beiden Tangenten von \mathbf{p} an \mathbf{k} die *Polare* von \mathbf{p} . Wir bezeichnen sie mit \mathcal{P} . Der Schnittpunkt von \mathcal{P} mit der Verbindungsgeraden von \mathbf{p} und \mathbf{m} heißt der am Kreis *gespiegelte* oder *invertierte Punkt* \mathbf{p}' von \mathbf{p} . Die zugehörige Operation heißt *Spiegelung* oder *Inversion*.

Behauptung 1: Für alle Elemente $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ gilt die Gleichung

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2. \quad (1)$$

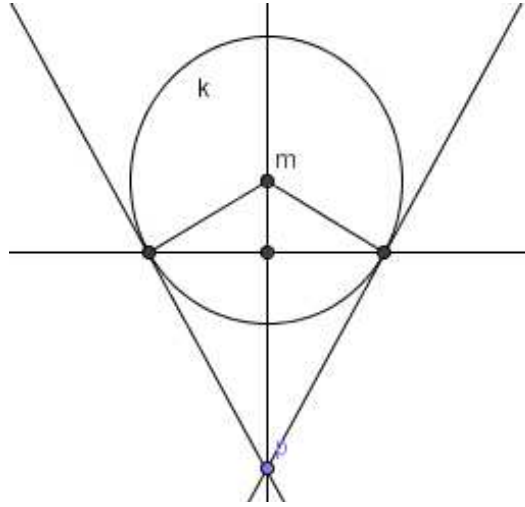


Abb. 1: Spiegelung am Kreis

Beweis: Aufgrund ähnlicher Dreiecke (vgl. die Abbildung zur Inversion mittels GeoGebra) ergibt sich

$$(\cos \alpha =) \frac{\|\mathbf{p}' - \mathbf{m}\|}{r} = \frac{r}{\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\|}$$

oder, gleichbedeutend,

$$\|\mathbf{p}' - \mathbf{m}\| = \frac{r^2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\|}. \quad (2)$$

Die Gleichung von \mathcal{P} ergibt sich wie folgt: Sei

$$t = \frac{\|\mathbf{p}' - \mathbf{m}\|}{\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\|} = \frac{r^2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\|^2},$$

dann ist

$$\mathbf{p}' = \mathbf{m} + t(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = \mathbf{m} + \frac{r^2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\|^2}(\mathbf{p} - \mathbf{m}).$$

Für ein beliebiges Element $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ gilt wegen $\mathbf{x} - \mathbf{p}' \perp \mathbf{p} - \mathbf{m}$

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{x} - \mathbf{p}') \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{m}) \\ &= \left(\mathbf{x} - \left(\mathbf{m} + \frac{r^2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\|^2}(\mathbf{p} - \mathbf{m}) \right) \right) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{m}) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{p} - \mathbf{m}) - \frac{r^2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\|^2}(\mathbf{p} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{m}) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{p} - \mathbf{m}) - r^2. \quad \square \end{aligned}$$

Anmerkung 1: Aus dem Spezialfall von (1) für $\mathbf{x} = \mathbf{p}'$, nämlich

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2,$$

folgt unmittelbar $\|\mathbf{p}' - \mathbf{m}\| \cdot \|\mathbf{p} - \mathbf{m}\| = r^2$ oder, dementsprechend, die Beziehung (2), welche die Bezeichnung "invertierter Punkt" verständlich macht.

Seien nun $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_p \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_p \in (-1, 1)$ ein Punkt der x -Achse und \mathbf{k} der Kreis mit dem Mittelpunkt $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$ und dem Radius $r \in m(1 - \frac{1}{m}, 1)$. Wir spiegeln nun \mathbf{p} am Kreis \mathbf{k} . Dann hat (1) die Form

$$r^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_p - 0 \\ 0 - m \end{pmatrix} = x \cdot x_p - (y - m) \cdot m$$

oder

$$y \cdot m - x \cdot x_p = m^2 - r^2 > 0.$$

Schneidet man die Polare \mathcal{P} mit der y -Achse, so liefert das immer denselben Punkt, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mit

$$y_0 = m - \frac{r^2}{m} = m(1 - (\frac{r}{m})^2) \in (0, 2 - \frac{1}{m}).$$

Anmerkung 2: Letzteres gilt wegen $r \in m(1 - \frac{1}{m}, 1)$. Für unseren Zweck ist es erforderlich, dass der gespiegelte Punkt \mathbf{p}' im Innern des Einheitskreises \mathbf{k}_0 um den Koordinatenursprung liegt, dass also $y_0 < 1$ gilt, zumal die Gleichung von \mathbf{k}_0 $x^2 + y^2 = 1$ ist. Daher müssen wir $r \in m(\sqrt{1 - \frac{1}{m}}, 1)$ fordern.

Seien nun

$$r_s = \frac{1}{2}(m - y_0) = \frac{m}{2}(\frac{r}{m})^2$$

und

$$m_s = y_0 + r_s = m(1 - \frac{1}{2}(\frac{r}{m})^2)$$

und \mathbf{k}_s der Kreis, welcher den Mittelpunkt $\mathbf{m}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ m_s \end{pmatrix}$ und den Radius r_s besitzt. Aus der Zeichnung mittels GeoGebra ist unmittelbar ersichtlich, dass die Spiegelung \mathbf{p}' des Punktes \mathbf{p} am Kreis \mathbf{k} auf dem Kreis \mathbf{k}_s liegt.

4.2. HYPERBOLISCHE GEOMETRIE: POINCARÉ'S KREISMODELL 123

Der Kreis \mathbf{k} schneide im Folgenden, wie in Abbildung 2 dargestellt, den Einheitskreis \mathbf{k}_0 in einem rechten Winkel.

Nach dem Obigen gilt der folgende Sachverhalt.

Behauptung 2: Spiegelt man das Intervall $(-1, 1)$ der x -Achse am Kreis \mathbf{k} , so liegen alle dadurch erzeugten Punkte auf dem Kreis \mathbf{k}_s und dieser schneidet den Einheitskreis \mathbf{k}_0 ebenfalls in einem rechten Winkel. (Warum gilt Letzteres ?)

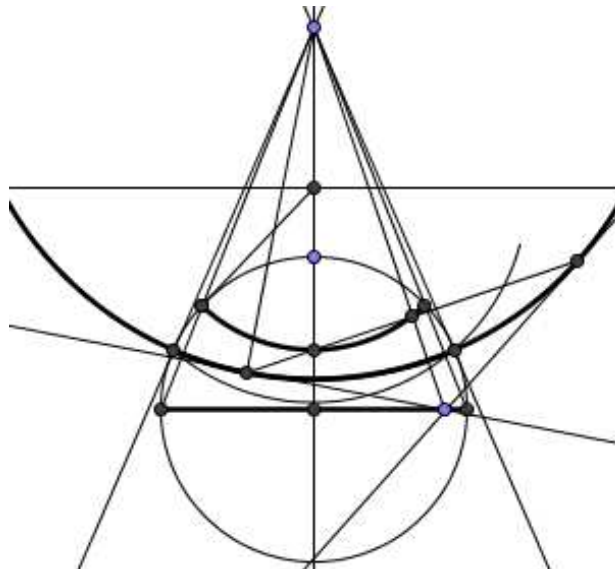


Abb. 2: Spiegelung des Intervalls $(-1, 1)$ am Kreis k

Die Gerade durch die Punkte \mathbf{p} und \mathbf{m} hat die Gleichung

$$y = m\left(1 - \frac{x}{x_p}\right).$$

Die Berührungspunkte der Tangente \mathbf{t} an den Kreis \mathbf{k} sind gemäß

$$y \cdot m - x \cdot x_p = m^2 - r^2 \quad \text{und somit} \quad y - m = x \cdot \frac{x_p}{m} - \frac{r^2}{m}$$

und $x^2 + (y - m)^2 = r^2$ durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + \left(x \cdot \frac{x_p}{m} - \frac{r^2}{m}\right)^2 - r^2 \\ &= x^2 \left(1 + \left(\frac{x_p}{m}\right)^2\right) - 2x \cdot x_p \left(\frac{r}{m}\right)^2 - r^2 \left(1 - \left(\frac{r}{m}\right)^2\right) \end{aligned}$$

gegeben. Seien

$$x(x_p) = x_p \cdot \frac{\left(\frac{r}{m}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_p}{m}\right)^2}$$

und D die Diskriminante der quadratischen Gleichung. Dann sind deren Lösungen $x_{1,2} = x(x_p) \pm \sqrt{D}$ und $x(x_p)$ ist die x -Koordinate des gespiegelten Punktes von \mathbf{p} . Die zugehörige y -Koordinate ist

$$y(x_p) = m\left(1 - \frac{x(x_p)}{x_p}\right) = m\left(1 - \frac{\left(\frac{r}{m}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_p}{m}\right)^2}\right).$$

Anwendungen

Spezialfall $x_p = 0$: Für diesen Fall ergeben sich - wie es sein soll -

$$x(x_p) = 0 \quad \text{und} \quad y(x_p) = y_0 = m\left(1 - \left(\frac{r}{m}\right)^2\right).$$

Spezialfall $x_p \in \{-1, 1\}$: In diesem Fall ergeben sich

$$x(\pm 1) = \pm \frac{\left(\frac{r}{m}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2} \quad \text{und} \quad y(\pm 1) = m\left(1 - \frac{\left(\frac{r}{m}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2}\right).$$

Anmerkung 3: Geht man von einem Kreis \mathbf{k} mit Radius r und Mittelpunkt \mathbf{m} und einem Punkt \mathbf{p} außerhalb von \mathbf{k} aus. Dann gilt für jeden der beiden Berührungspunkte \mathbf{x}_i , $i \in \{1, 2\}$ der Tangente

$$(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{p}) = 0.$$

Nun gilt für die Berührungspunkte weiters die Kreisgleichung

$$(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) = r^2.$$

Addiert man beide Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} r^2 &= (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) \cdot [(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) + (\mathbf{m} - \mathbf{p})] \\ &= (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{p}), \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Das ist die sogenannte *Spaltform* der Tangentengleichung.

M.C. Escher (1898 – 1972), niederländischer Künstler mit starkem Bezug zur Mathematik:



Figure 22. Circle Limit III

4.3 Ausblick

Bernhard Riemann (1826–1866) hat im Jahre 1854 in seiner epochemachenden Antrittsvorlesung an der Universität Göttingen mit dem Titel *„Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“* die Grundlagen für die Anwendungen in der Physik gelegt, welche *Albert Einstein* (1879 – 1955) in seiner allgemeinen Relativitätstheorie vollzieht.

Riemann beendete seine berühmte Vorlesung mit folgenden Worten:

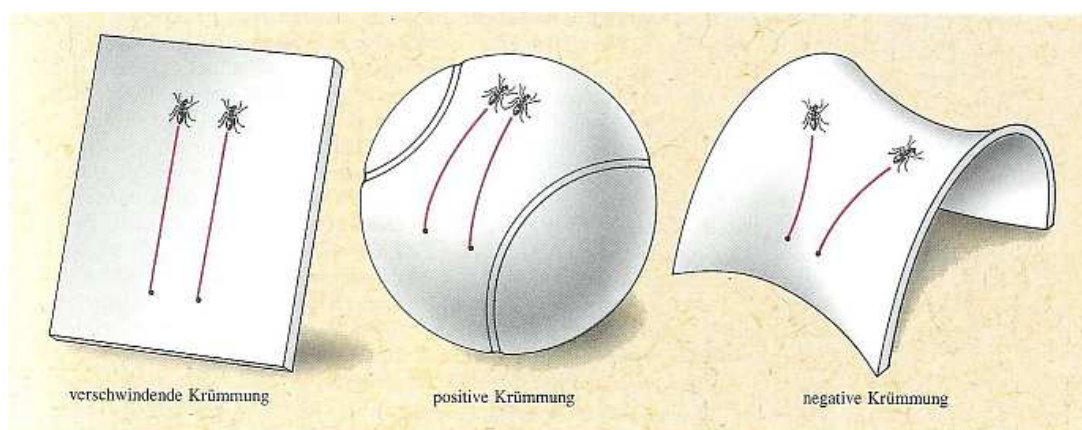
„Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Maßverhältnisse des Raumes ... der Grund der Maßverhältnisse (muß) außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.“

Die Entscheidung der Frage kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche

Untersuchungen, wie die hier geführte von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt."

Abbildung zur Raumkrümmung



"Anfänglich "parallele" Linien behalten auf einer flachen Oberfläche ohne Krümmung ihren Abstand bei, konvergieren auf einer Oberfläche mit positiver Krümmung und divergieren auf einer Oberfläche mit negativer Krümmung." (aus [19], "Krümmung: Die Sprache der Gravitation", S. 82-84).

"Denken wir uns - darin liegt keine logische Unmöglichkeit - verstandbegabte Wesen von nur zwei Dimensionen, die an der Oberfläche irgend eines unserer festen Körper leben oder sich bewegen. Wir nehmen an, dass sie nicht die Fähigkeit haben, irgend etwas außerhalb dieser Oberfläche wahrzunehmen, wohl aber die Wahrnehmungen, ähnlich den unsrigen, innerhalb der Ausdehnung der Fläche, in der sie sich bewegen, zu machen ... Anschauungen, die man hat, sich wegzudenken, ist leicht; aber Anschauungen, für die man nie ein Analogon gehabt hat, sich sinnlich vorzustellen, ist sehr schwer. ..." (aus Hermann von Helmholtz (1821 – 1894): "Über die Bedeutung der geometrischen Axiome" (1870), [31], S. 578-579).

A. Einstein: Spezielle Relativitätstheorie



Salzburg: Gedenktafel an der Andrä-Schule

Chapter 5

Anhang

5.1 Darstellung der Kegelschnitte aus dreidimensionaler Sicht

Im Folgenden

- (1) leiten wir die Gleichungen der Kegelschnitte her,
- (2) berechnen den Anstieg der Tangente in einem ihrer Punkte und
- (3) ermitteln den Radius der Krümmungskreise in ihren (Haupt-) Scheitelpunkten

und zwar jeweils aus dreidimensionaler Sicht.

Obwohl die Vorgangsweise für alle Kegelschnitte im Prinzip dieselbe ist, betrachten wir zunächst die Ellipse, dann die Parabel und schließlich die Hyperbel.

Die Ellipse erzeugen wir dabei als ebenen Schnitt eines Rotationszylinders, die Parabel und die Hyperbel als ebene Schnitte eines Rotationskegels.

Wir beschränken uns o.B.d.A. in der Regel auf den ersten Quadranten. Daher setzen wir stets voraus, dass der Punkt P eines Kegelschnitts $P = (x_0, y_0) \in [0, \infty)^2$ erfüllt.

Die Ellipse

Ein Rotationszylinder mit Radius b werde mit einer Ebene σ geschnitten, welche mit dessen Rotationsachse einen Winkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ einschließt. Um die durch diesen Zylinderschnitt erzeugte Ellipse unverzerrt darzustellen, wählen wir die Ebene σ horizontal. Die Länge der kleinen Halbachse ist

nach dem obigen b und die der großen Halbachse

$$a = \frac{b}{\sin \varphi} \in (b, \infty) .$$

Die nachstehende Abbildung zeigt Grund- und Aufriss dieses Zylinderschnitts.

(1. E) Herleitung der Ellipsengleichung

Wir leiten die Gleichung dieser Ellipse nun mit Hilfe der markierten rechtwinkligen Dreiecke im Aufriss her, wobei $P = (x_0, y_0) \in [0, a] \times [0, b]$ ein beliebiger Punkt der Ellipse ist.

Aufgrund der Ähnlichkeit der beiden linken markierten Dreiecke gilt

$$\frac{x_0}{d} = \frac{a}{b} \quad \text{oder, gleichbedeutend,} \quad \frac{d}{b} = \frac{x_0}{a} . \quad (1)$$

Für die y -Koordinate y_0 gilt aufgrund des Pythagoräischen Lehrsatzes - angewandt auf das markierte rechtwinklige Dreieck ganz rechts -

$$d^2 + y_0^2 = b^2 ,$$

bzw. nach Division durch b^2

$$\left(\frac{d}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1 .$$

Berücksichtigt man nun die Beziehung (1), so erhält man daraus die wohlbekannte Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1 . \quad (2)$$

(2) Berechnung des Anstiegs $k_T(P)$ der Tangente eines Kegelschnitts im Punkt P . Dabei nehmen wir an, dass P von den Scheitelpunkten verschieden ist. Für die Ellipse gilt somit $P = (x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$.

Wesentlich hierfür ist der Begriff der *Subnormalen*. Das ist die Strecke zwischen dem Schnittpunkt der Normalen der Tangente und dem Fußpunkt $(x_0, 0)$ von $P = (x_0, y_0)$.

Wir betrachten nun den Grundriss: Ist Δ die Länge der Subnormalen, dann ist der Anstieg der Normalen

$$k_N(P) = \pm \frac{y_0}{\Delta}$$

und damit der Anstieg der Tangenten

$$k_T(P) = -\frac{1}{k_N(P)} = \mp \frac{\Delta}{y_0} . \quad (3)$$

Anmerkung 1: Die Betrachtung mit Hilfe der Subnormalen setzt selbstverständlich voraus, dass eine solche existiert oder nicht auf einen Punkt zusammenschrumpft. Ersteres trifft lediglich für den Fall der Nebenscheitel einer Ellipse zu, Letzteres für die Hauptscheitel der Ellipse und die Scheitel von Parabel und Hyperbel (jeweils in erster Hauptlage). Für alle diese Punkte existiert jedoch ein Berührkreis bzw. ein Scheitelkrümmungskreis, so dass die Tangente auch in diesen Fällen existiert und horizontal bzw. vertikal verläuft.

So ist beispielsweise für die Ellipse mit der Gleichung (2) (und $a > b$) die Subnormale im Nebenscheitel $(0, b)$ nicht definiert bzw. schrumpft im Hauptscheitel $(0, a)$ auf diesen zusammen. Demzufolge ist im letzteren Fall $\Delta = 0$ und die Vorgangsweise mit Hilfe der Subnormalen in beiden Fällen nicht anwendbar. Da aber der Berührkreis im Nebenscheitel $(0, b)$ der Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (0, 0)$ und dem Radius b ist und im Hauptscheitelpunkt $(0, a)$ der Berührkreis der Krümmungskreis ist, ist im ersten Fall die Gerade mit der Gleichung $y = b$ die Tangente und im zweiten Fall die Gerade mit der Gleichung $x = a$.

(2. E) Berechnung des Anstiegs $K_T(P)$ der Tangente der Ellipse in P , $P = (x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$

Zur Ermittlung der Länge Δ der Subnormalen der Ellipse in $P = (x_0, y_0)$ betrachten wir nun wieder den Aufriss: Aufgrund der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke $PGKM_2$ und S_1KM_1M erhält man

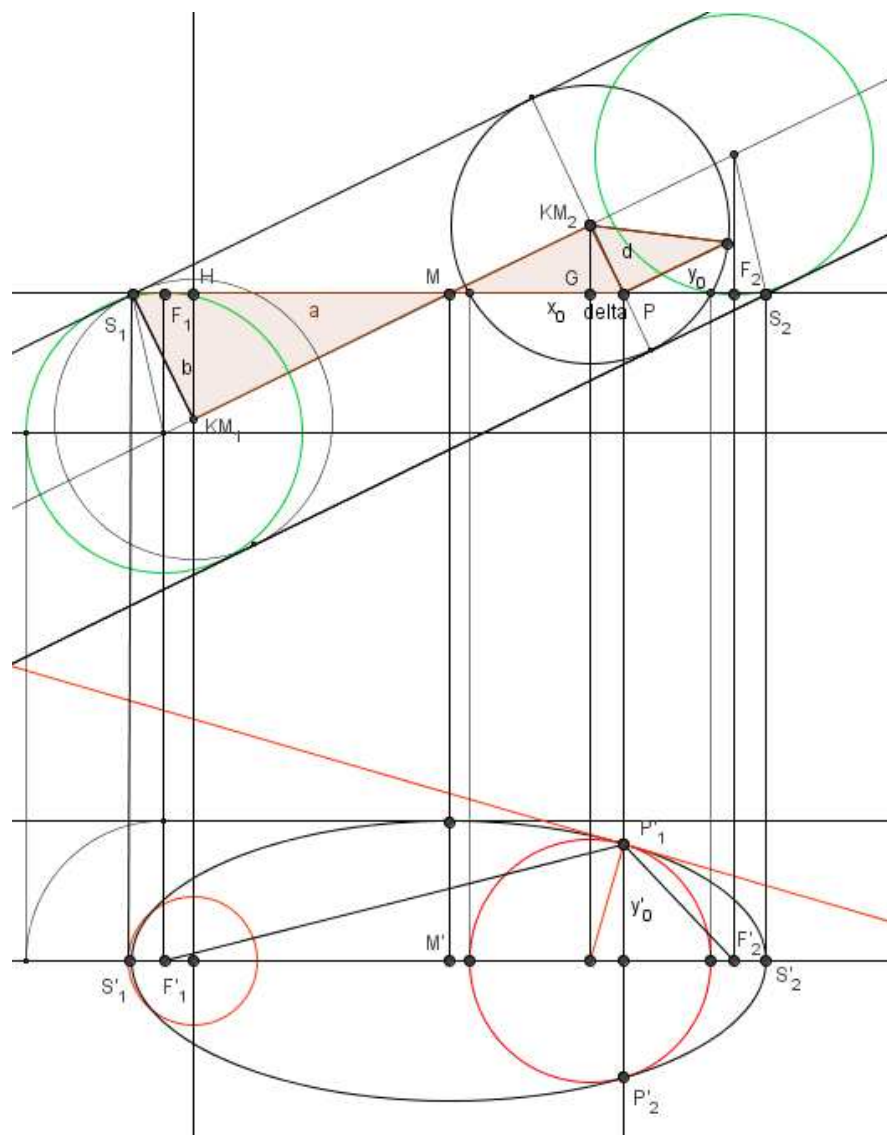
$$\frac{\Delta}{d} = \frac{b}{a}$$

und im Hinblick auf (1) daher

$$\Delta = \frac{b}{a} \cdot d = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot x_0 .$$

Der Anstieg der Tangente im Punkt $P = (x_0, y_0)$ ist daher wegen (3)

$$k_T(P) = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x_0}{y_0} (< 0).$$



(3. E) Radien der Krümmungskreise in den Hauptscheiteln der Ellipse

Für den Radius ρ des Krümmungskreises in S_1 gilt aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke $S_1 H K M_1$ und $K M_1 H M$

$$\frac{\rho}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{b^2}{a}.$$

Anmerkung 2: Der Radius des Berührkreises im Nebenscheitel $(0, b)$ ist

offensichtlich b . Der Radius des Krümmungskreises in diesem Punkt ist, wie in Abschnitt 3.6.2 gezeigt wird, jedoch

$$R = \frac{a^2}{b} > b .$$

Die Parabel

Ein Rotationskegel werde mit einer Ebene σ geschnitten, welche parallel zu einer erzeugenden Geraden des Kegels ist. Um die Parabel unverzerrt darzustellen, wählen wir die Ebene σ wieder horizontal. $p \in (0, \infty)$ sei der Focalparameter (die Entfernung des Brennpunkts F von der Leitlinie l .)

Die nachstehende Abbildung zeigt wieder Grund- und Aufriss dieses Kegelschnitts.

Wir nehmen wieder o.B.d.A. an, dass $P = (x_0, y_0) \in [0, \infty)^2$ ein beliebiger Punkt der Parabel ist.

Anmerkung 3: In Betracht der beiden Parallelogramme in Auf- und Grundriss ist die Länge der Subnormalen im Fall unserer Parabel stets p und der Abstand des Brennpunkts F vom Scheitel S ist $p/2$.

(1. P) Herleitung der Parabelgleichung

Wir betrachten nun den Grundriss. Aus Anmerkung 3 folgt, dass das Dreieck $F'P'L'$ gleichschenkelig ist um somit die Seiten $F'P'$ und $P'L'$ gleich lang sind. Dementsprechend gilt

$$\sqrt{y_0^2 + (x_0 - \frac{p}{2})^2} = x_0 + \frac{p}{2}$$

und folglich

$$y_0^2 = 2px_0 . \quad (4)$$

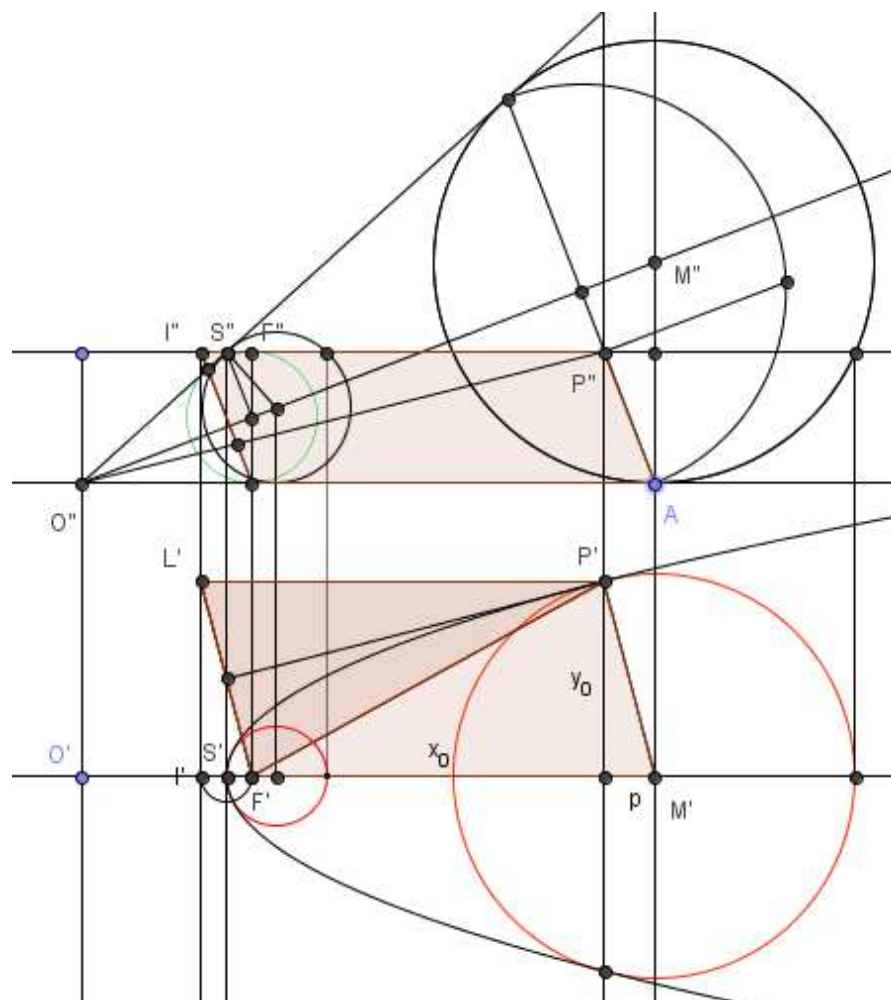
(2. P) Berechnung des Anstiegs $k_T(P)$ der Tangente der Parabel im Punkt P , $P = (x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$

Da, wie bereits in Anmerkung 3 festgestellt wurde, die Länge der Subnormalen $\Delta \equiv p$ ist, ist der Anstieg der Normale in $P = (x_0, y_0)$ gleich

$$k_N(P) = -\frac{y_0}{\Delta} = -\frac{y_0}{p} (< 0)$$

und der Anstieg der Tangent daher wegen (4)

$$k_T(P) = -\frac{1}{k_N(P)} = \frac{p}{y_0} = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \sqrt{\frac{p}{2x_0}} (> 0) .$$



(3. P) Radius ρ des Krümmungskreises der Parabel im Scheitel S

Unsere Konstruktion einer Tangente in einem Punkt P des Kegelschnitts erfolgt dadurch, dass wir - siehe Grundriss - den Mittelpunkt M' eines Kreises K auf der Achse des Kegelschnitts so wählen, dass K den Kegelschnitt im Punkt P berührt¹. Der Radius dieses Kreises K ergibt sich dabei - wie dem Aufriss zu entnehmen ist - dadurch, dass wir den zugehörigen Berührkreis jener Kugel, welche

- dem Kegel eingeschrieben ist und
- den Punkt P des Kegelschnitts enthält,

¹Diese Vorgangsweise entspricht der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Kreismethode von Descartes zur Konstruktion von Tangenten.

mit der Ebene σ schneiden. Wählt man - anstelle des Punktes P - den Scheitelpunkt S , so ergibt sich - wie aus dem Aufriss ersichtlich - dass der Radius ρ des Berührkreises im S für den Fall unserer Parabel gleich

$$\rho = p$$

ist.

Die Hyperbel

Ein Rotationskegel werde mit einer achsenparallelen Ebene σ geschnitten. Um die entstehende Hyperbel unverzerrt darzustellen, wählen wir die Ebene σ horizontal. Bei vorgegebenem Anstiegswinkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ der erzeugenden Geraden des Drehkegels gegenüber der Rotationsachse und vorgegebener Schnitthöhe h sind die Parameter der Hyperbel

$$a = h \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad b = h \cdot \sin \varphi .$$

Die nachstehende Abbildung zeigt wieder Grund- und Aufriss dieses Kegelschnitts.

(1. H) Herleitung der Hyperbelgleichung

Wir leiten die Gleichung dieser Hyperbel nun mit Hilfe der markierten rechtwinkligen Dreiecke im Aufriss her, wobei $P = (x_0, y_0) \in [0, \infty)^2$ ein beliebiger Punkt der Hyperbel ist.

Aufgrund der Ähnlichkeit der beiden linken markierten rechtwinkligen Dreiecke gilt

$$\frac{r}{x_0} = \frac{b}{a} \quad \text{oder, gleichbedeutend,} \quad \frac{r}{b} = \frac{x_0}{a} . \quad (5)$$

Für die y -Koordinate y_0 gilt aufgrund des Pythagoräischen Lehrsatzes - angewandt auf das markierte rechtwinklige Dreieck ganz oben -

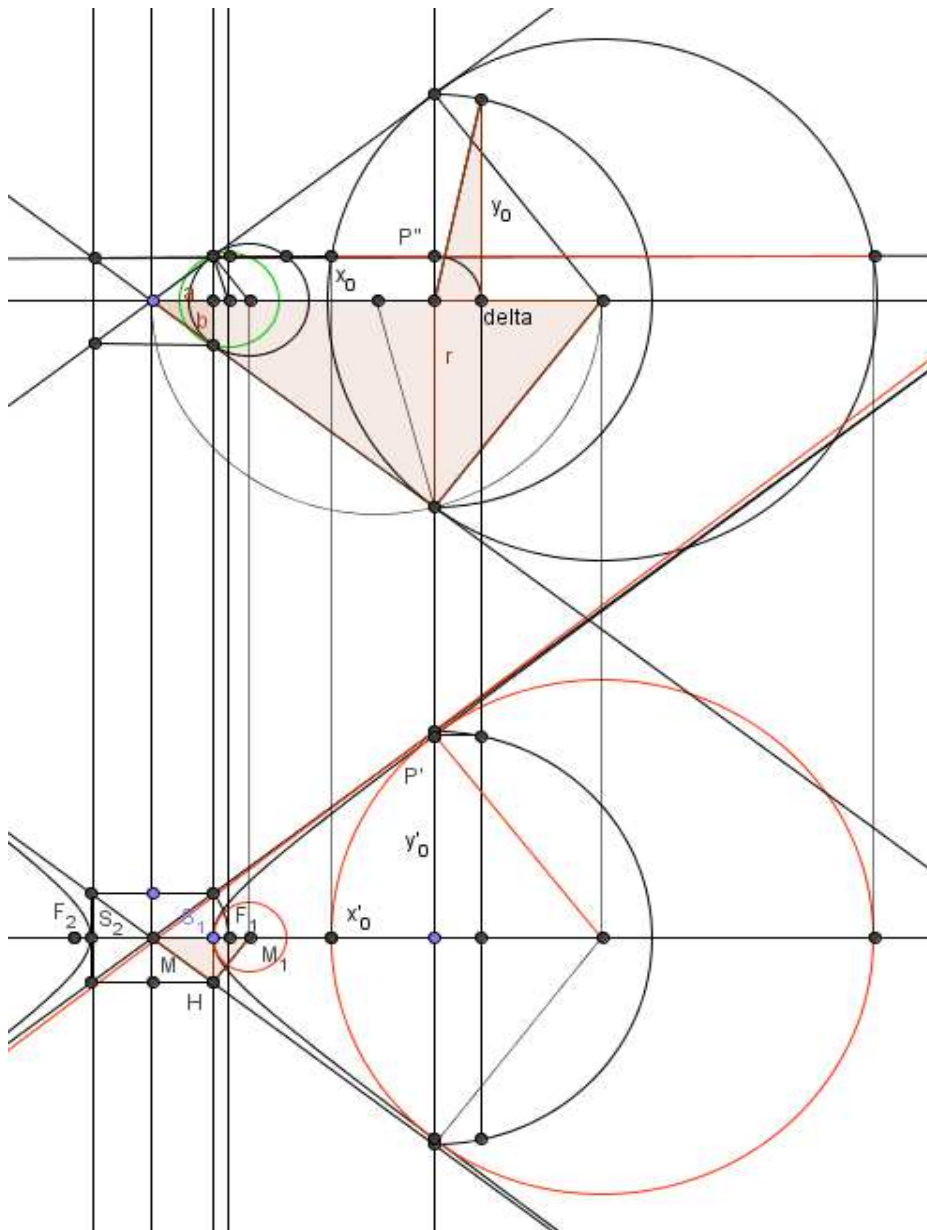
$$b^2 + y_0^2 = r^2 ,$$

bzw. nach Division durch b^2

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1 .$$

Berücksichtigt man die Beziehung (5), so erhält man daraus die wohlbekannte Gleichung der Hyperbel

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1 .$$



im Punkt P , $P = (x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$

Die Länge Δ der Subnormalen erhält man mittels des Höhensatzes - angewandt auf das große markierte rechtwinkelige Dreieck (mit dem Thaleskreis-

5.2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEITEN UND KEPLERS RADIENGESETZ 137

bogen) -

$$\Delta \cdot x_0 = r^2 \quad \text{und somit} \quad \Delta = \frac{r^2}{x_0} = \left(\frac{r}{x_0}\right)^2 \cdot x_0$$

und im Hinblick auf (5) daher

$$\Delta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot x_0 .$$

Also ist der Anstieg der Normalen in P $k_N(P) = -\frac{y_0}{\Delta}$ und der Anstieg der Tangente daher

$$k_T(P) = -\frac{1}{k_N(P)} = \frac{\Delta}{y_0} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x_0}{y_0} (> 0).$$

(3. H) Radius ρ der Krümmungskreise in den Scheiteln

Für den Radius ρ des Krümmungskreises in S_1 ergibt sich aufgrund der Ähnlichkeit der beiden markierten Dreiecke $M_1 S_1 H$ und $H S_1 M$ im Grundriss

$$\frac{\rho}{b} = \frac{b}{a}$$

und somit $\rho = \frac{b^2}{a}$.

5.2 Kosmische Geschwindigkeiten und Keplers Radiengesetz

"Energie ist ewige Wonne."

William Blake (1757 – 1827)

Ein Flugkörper mit Masse m bewege sich auf einer Bahn um die Erde (mit Masse M). Sei ρ dessen Abstand vom Erdmittelpunkt. Dann ist die Kraft, welche die Erde auf den Flugkörper ausübt, aufgrund des *Newtonschen Gravitationsgesetzes*

$$\|F\| = \frac{GMm}{\rho^2},$$

wobei G die universelle *Gravitationskonstante* ist. Sind r_0 der Ausgangsradius knapp über der Oberfläche der Erde² und r die Entfernung, welche der

²Wir stellen uns diese als eine Kugel vor und ignorieren den Luftwiderstand.

Flugkörper am Ende einer bestimmten Bewegung erreicht, so ist die *geleistete Arbeit* bzw. die Energiedifferenz für die *potentielle Energie*

$$\Delta E_{pot} = \int_{r_0}^r \frac{GMm}{\rho^2} d\rho = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) .$$

Sind ferner v_0 die (horizontale) Geschwindigkeit des Flugkörpers knapp über der Erdoberfläche und v seine Geschwindigkeit am Ende der betreffenden Bewegung, so ist Energiedifferenz für die *kinetische Energie*

$$\Delta E_{kin} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} .$$

Gemäß dem Energieerhaltungssatz, welcher besagt, dass die Summe aus potentieller und kinetischer Energie für jeden Bahnpunkt des Körpers konstant ist, gilt $\Delta E_{kin} = \Delta E_{pot}$ bzw., in der vorliegenden Situation,

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) .$$

Indem wir diese Gleichung mit $\frac{2}{m}$ multiplizieren und nach v_0^2 auflösen, erhalten wir

$$v_0^2 = v^2 + 2GM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) . \quad (0)$$

Im Folgenden betrachten wir sowohl eine elliptische Umflaubahn als auch eine parabolische Bahn, wobei wir das *semi-latus rectum*

$$l = a(1 - \varepsilon^2) ,$$

welches mit dem Radius des Krümmungskreises im betreffenden Hauptscheitelpunkt übereinstimmt, als fest annehmen. Die Größen $a > 0$ und $\varepsilon \in [0, 1]$ variieren jedoch, sodass auch der Grenzfall der Parabel (für $l = p$, $\varepsilon \nearrow 1$ und $a \nearrow \infty$) mit eingeschlossen ist. Seien

$r = r(\varphi) = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ der Radius für einen beliebigen Punkt des Kegelschnitts und $v = v(\varphi)$ die zugehörige Geschwindigkeit,

$r_P = r(0) = a(1 - \varepsilon)$ der Radius im Perihel und v_P die zugehörige Geschwindigkeit und

$r_A = r(\pi) = a(1 + \varepsilon)$ (für den Fall einer Ellipse) der Radius im Aphel und v_A die zugehörige Geschwindigkeit.

Überlegungen zur Ellipsenbahn: Wir gehen von der Gleichung (0) mit $v_0 = v_P$ und $v = v_A$ aus. Wegen

$$r_P = a(1 - \varepsilon) \quad \text{und} \quad r_A = a(1 + \varepsilon) \quad (1)$$

ist

$$\begin{aligned} v_P^2 - v_A^2 &= 2GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) = 2GM\left(\frac{1}{a(1 - \varepsilon)} - \frac{1}{a(1 + \varepsilon)}\right) \\ &= \frac{2GM}{a} \cdot \frac{1 + \varepsilon - (1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon^2} = \frac{GM}{a(1 - \varepsilon^2)} \cdot 4\varepsilon = \frac{GM}{l} \cdot 4\varepsilon \end{aligned}$$

und daher

$$(v_P - v_A)(v_P + v_A) = v_P^2 - v_A^2 = \frac{GM}{l} \cdot 4\varepsilon .$$

Es ist somit naheliegend, dass gelten

$$v_P - v_A = \sqrt{\frac{GM}{l}} \cdot 2\varepsilon \quad \text{und} \quad v_P + v_A = \sqrt{\frac{GM}{l}} \cdot 2 . \quad (2)$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen und anschließender Division durch 2 erhalten wir die Lösungen

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{l}} \cdot (1 + \varepsilon) \quad \text{und} \quad v_A = \sqrt{\frac{GM}{l}} \cdot (1 - \varepsilon) . \quad (3)$$

Anmerkung 1: Für das Produkt dieser Geschwindigkeiten mit den zugehörigen Radien (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} v_P \cdot r_P &= \sqrt{\frac{GM}{l}}(1 + \varepsilon) \cdot a(1 - \varepsilon) = \sqrt{GM \cdot l} \\ &= \sqrt{\frac{GM}{l}}(1 - \varepsilon) \cdot a(1 + \varepsilon) = v_A \cdot r_A , \end{aligned}$$

also Keplers sogenanntes *Radiengesetz*

$$k = v_P \cdot r_P = v_A \cdot r_A \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{GM \cdot l} .$$

Johannes Kepler formulierte seine einschlägige Aussage, dass die Geschwindigkeiten der Planeten umgekehrt proportional zu ihrem Abstand von der Sonne sind, bereits in seinem im Jahre 1596 veröffentlichten Werk "*Mysterium*

cosmographicum". Das Radiengesetz ist allgemein jedoch nicht richtig. Es trifft - wie in den vorliegenden beiden Fällen - nur dann zu, wenn der Abstand r mit dem sogenannten Normalabstand n übereinstimmt.

Anmerkung 2 (a) Erste kosmische Geschwindigkeit: Für den Spezialfall eines Kreises ($\varepsilon = 0$, $a = r$) ergibt sich aus (3)

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{r}} (= v_A)$$

(b) Zweite kosmische Geschwindigkeit: Für den Spezialfall einer Parabel ($\varepsilon \nearrow 1$, $a \nearrow \infty$, derart dass $a(1 - \varepsilon^2) = l = p$ konstant ist) ergeben sich aus (3)

$$\lim_{\varepsilon \nearrow 1} v_P = 2\sqrt{\frac{GM}{p}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (\text{und} \quad \lim_{\varepsilon \nearrow 1} v_A = 0), \quad (4)$$

wobei $r = \frac{p}{2}$ die Entfernung der Scheitelpunkts vom Brennpunkt der Parabel ist.

"The comets move in some of the conic sections, having their foci in the centre of the sun, and by radii drawn to the sun describe areas proportional to times."

"... And (in case of a parabolic orbit) therefore the comet, at the same mean distance of the earth from the sun, with a velocity which is to the velocity of the earth as $\sqrt{2}$ to 1, would be its ... motion."

Isaac Newton, Principia Mathematica, Book III System of the World, English translation 1729

Proposition 1: Sei $P = P(\varphi)$ ein allgemeiner Punkt einer Parabel \mathcal{P} mit Radialabstand

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos \varphi}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

und seien $n(\varphi)$ der Normalabstand des Brennpunkts von der Tangente t an \mathcal{P} im Punkt P und $v(\varphi)$ die Geschwindigkeit eines Flugkörpers, der die Erde auf der Parabelbahn \mathcal{P} umrundet, in P . Dann gilt

$$v(\varphi) \cdot n(\varphi) = \sqrt{GM \cdot p} \quad \forall \varphi \in (-\pi, \pi).$$

(Man bedenke, dass der Normalwinkel $\alpha(\varphi) = \varphi/2$ ist.) Für die Geschwindigkeit $v(\varphi)$ gilt wegen (0) und (4)

$$\begin{aligned} v^2(\varphi) &= v_P^2 - 2GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r(\varphi)}\right) \\ &= \frac{4GM}{p} - 2GM\left(\frac{1}{p/2} - \frac{1}{p/(2\cos^2(\frac{\varphi}{2}))}\right) \\ &= 4\frac{GM}{p} \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Daher ist diese

$$v(\varphi) = 2\sqrt{\frac{GM}{p}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (5)$$

Also gilt für alle $\varphi \in [0, \pi)$

$$v(\varphi) \cdot n(\varphi) = 2\sqrt{\frac{GM}{p}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{p}{2\cos(\frac{\varphi}{2})} = \sqrt{GM \cdot p} = k. \quad \square$$

Proposition 2: Sei $P = P(\varphi)$ ein allgemeiner Punkt einer Ellipse \mathcal{E} mit Radialabstand

$$r(\varphi) = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi) \quad \text{mit} \quad l = a(1 - \varepsilon^2)$$

und seien $n(\varphi)$ der Normalabstand des Brennpunkts von der Tangente t an \mathcal{E} im Punkt P und $v(\varphi)$ die Geschwindigkeit eines Flugkörpers, der die Erde auf der Ellipsenbahn \mathcal{E} umrundet, in P . Dann sind

$$n(\varphi) = \frac{l}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}} \quad \text{und} \quad v(\varphi) = \sqrt{\frac{GM}{l}} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}$$

und es gilt

$$v(\varphi) \cdot n(\varphi) = \sqrt{GM \cdot l} \quad \forall \varphi \in (-\pi, \pi). \quad (6)$$

Anmerkung 4: Geschwindigkeiten für spezielle Bahnpunkte sind

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{GM}{l}} \cdot \begin{cases} 1 + \varepsilon & \text{für } \varphi = 0 & (\text{Perihel}) \\ \sqrt{1 + \varepsilon^2} & \text{für } \varphi = \pi/2 \\ \sqrt{1 - \varepsilon^2} & \text{für } \cos(\varphi) = -\frac{\varepsilon}{a} = -\varepsilon & (\text{Nebenscheitelpunkt}) \\ 1 - \varepsilon & \text{für } \varphi = \pi & (\text{Aphel}) \end{cases}$$

5.2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEITEN UND KEPLERS RADIENGESETZ 143

Die Geschwindigkeit in den Nebenscheitelpunkten ist also das geometrische Mittel der Geschwindigkeiten in Perihel und Aphel und hat gemäß $l = a(1 - \varepsilon^2)$ den Wert

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} . \quad (7)$$

Dieser hängt offensichtlich von der Länge a der großen Halbachse, nicht jedoch von der numerischen Exzentrizität ε ab. Dies ist ebenfalls eine äußerst bemerkenswerte Eigenschaft des dritten Keplerschen Gesetzes

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3 \quad (8)$$

für die Umlaufzeit T eines Planeten, wobei M nunmehr die Masse der Sonne sei.

Die Formeln (7) und (8) lassen übrigens folgende Deutung zu. Gegeben sei eine fiktive Kreisbahn mit Radius a und somit Umfang $2a\pi$ und mit der eben durch (7) gegebenen konstanten Bahngeschwindigkeit³. Da andererseits $v = \frac{2a\pi}{T}$ ist, gilt daher

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{T}{2a\pi}\right)^2 = \frac{a}{GM}$$

und folglich (8).

Anmerkung 5: Zumal der Flächeninhalt der Ellipse $ab\pi$ ist, ist das Doppelte der - gemäß dem zweiten Keplerschen Gesetz konstanten - vom Radiusvektor pro Zeiteinheit überstrichenen Fläche, der sogenannten *Flächengeschwindigkeit*, wegen $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{a \cdot l}$ gleich

$$2v_F = \frac{2ab\pi}{T} = \frac{2\pi a^{3/2}}{T} \sqrt{l} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}} \sqrt{l} = \sqrt{GM \cdot l} .$$

Demnach

(i) ist das Radiengesetz (6) gleichbedeutend mit dem zweiten Keplerschen Gesetz und

(ii) dieses impliziert, zusammen mit dem ersten, das dritte Keplersche Gesetz.

Anmerkung 6: Das Analogon der Propositionen 1 und 2 für Hyperbelbahnen (mit $l = a(\varepsilon^2 - 1)$, $\varepsilon > 1$) gilt ebenfalls.

³welche naturgemäß die Form der ersten kosmischen Geschwindigkeit besitzt

Proposition 3: Seien, wie üblich,

$$l = \begin{cases} a(1 - \varepsilon^2) & \text{für } \varepsilon \in [0, 1) \\ p & \text{für } \varepsilon = 1 \\ a(\varepsilon^2 - 1) & \text{für } \varepsilon \in (1, \infty) \end{cases}$$

und

$$v_\varepsilon(\varphi) = \sqrt{\frac{GM}{l}} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi} .$$

Weiters seien $F_\varepsilon = (-\varepsilon, 0)$ und $H(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreis \mathcal{K} . Dann ist die Größe $v_\varepsilon(\varphi) \cdot \sqrt{\frac{l}{GM}}$ wegen

$$v_\varepsilon^2(\varphi) \cdot \frac{l}{GM} = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi = (\varepsilon + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$$

die Entfernung der Punkte F_ε und $H(\varphi)$. Das eben beschriebene Objekt heißt *Geschwindigkeitsdiagramm* oder *Hodograph* ($\delta\delta\acute{o}\zeta$ [hodos], griechisch: Weg) des betreffenden Kegelschnitts.

Das Geschwindigkeitsdiagramm beschreibt das $\sqrt{\frac{l}{GM}}$ -fache der Geschwindigkeiten

$$v_\varepsilon(\varphi) \text{ eines Körpers auf einer } \begin{cases} \text{Ellipsenbahn} & \text{für } \varepsilon \in [0, 1) \\ \text{Parabelbahn} & \text{für } \varepsilon = 1 \\ \text{Hyperbelbahn} & \text{für } \varepsilon \in (1, \infty) . \end{cases}$$

Die Ermittlung des *Bahndiagramms* des betreffenden Kegelschnitts aus dem Geschwindigkeitsdiagramm erfolgt auf ganz elementare Weise, nämlich mit Hilfe dessen Faltkonstruktion, wie wir sie zu Beginn der Lehrveranstaltung kennengelernt haben (vgl. die Übungsaufgaben A 2 und A 5).

Die folgenden Abbildungen erklären für alle drei Kegelschnitte, wie man ausgehend vom Punkt H des Geschwindigkeitsdiagramms den zugehörigen

5.2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEITEN UND KEPLERS RADIENGESETZ 145

Punkt P des Bahndiagramms konstruiert.

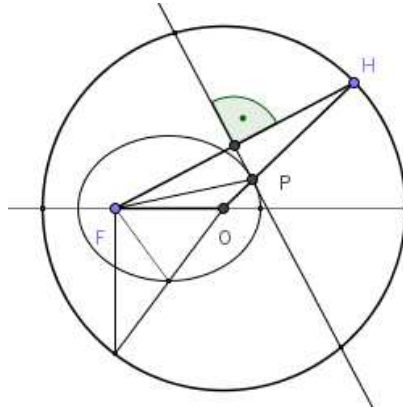


Abbildung zur Ellipsenbahn

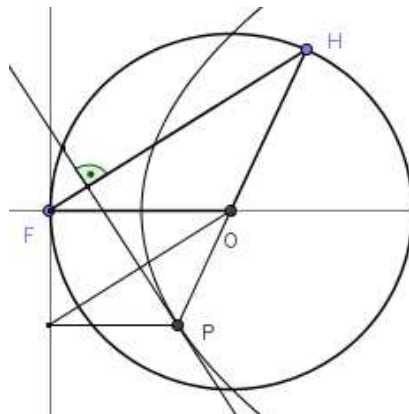


Abbildung zur Parabelbahn

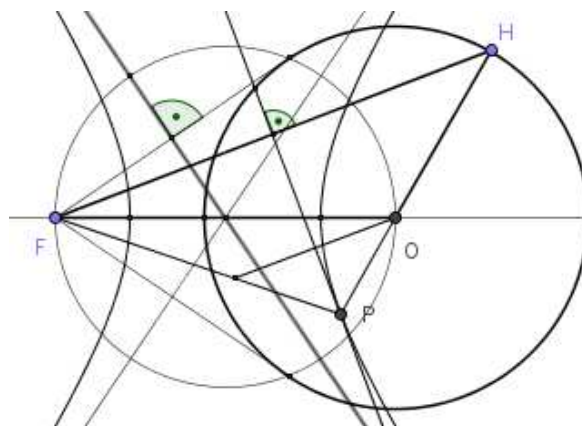


Abbildung zur Hyperbelbahn

Anmerkung 7: Im Fall einer Parabelbahn ist die "Restgeschwindigkeit im Unendlichen" gemäß (5) gleich

$$\lim_{\varphi \nearrow \pi} v_1(\varphi) = 0,$$

was naturgemäß in Übereinstimmung mit der zweiten Aussage von (4) ist. Für den Fall einer Hyperbelbahn sei $\varphi_\infty = \arccos(-\frac{1}{\varepsilon})$. Der Komet (Trabant) bewegt sich in diesem Fall mit der Restgeschwindigkeit

$$v_\varepsilon(\varphi_\infty) = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

(praktisch) entlang der entsprechenden Asymptote der Hyperbel gegen ∞ .

Das Konzept, Kegelschnittbahnen mit Hilfe des zugehörigen Geschwindigkeitsdiagramms zu beschreiben, ist äußerst elegant. Der US-amerikanische Physik-Nobelpreisträger *Richard P. Feynman* (1918 – 1988) hat es - wie im Buch [6] "Feynman's Lost Lecture - The Motion of Planets Around the Sun" beschrieben - in einer seiner legendären "Feynman Freshman Lectures" 1964 am Caltech in Pasadena verwendet (vgl. auch den Abschnitt "R. Feynman and the reciprocal problem" in [37], p. 147). Einen ähnlichen Zugang hatte der schottische Physiker *James Clerk Maxwell* (1831 – 1879) schon im Jahre 1877 gewählt.

5.3 Teilgebiete der Geometrie

Kartographie

Eratosthenes von Kyrene (276-194 v.Chr.)
Hipparchos von Nicäa (ca. 180-120 v.Chr.)
Strabon (64/63 v.Chr.-20 n.Chr.)
Klaudios Ptolemaios (ca. 84 - ca. 160 n.Chr.)
Marinos von Pyros (2. Jh. n.Chr.)
Johannes Werner (1468-1522)
Nicolaus Kauffmann - Mercator (1620-1687)
Leonhard Euler (1707-1783)
Johann Heinrich Lambert (1728-1777)
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Kegelschnitte

Menaichmos (ca. 380 - ca. 320 v.Chr.)
Euklid von Alexandria (ca. 360 - ca. 290 v.Chr.)
Archimedes von Syracus (ca. 287-212 v.Chr.)
Apollonios von Perge (ca. 260 - ca. 190 v.Chr.)
Pappos von Alexandria (ca. 290 - ca. 350 n.Chr.)
Proclus Diadochus (410-485 n.Chr.)
Anthemios von Tralles (ca. 474 - ca. 534)
Ibrahim Ibn Sinan (908/9 - 946)
Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham, latinisiert Alhazen (um 965-1039)
Johannes Werner (1468-1522)
Albrecht Dürer (1471-1528)
Johannes Kepler (1571-1630)
Pierre de Fermat (1601-1665)
Athanasius Kircher (1602-1680)
Frans van Schooten (1615-1660)
Blaise Pascal (1623-1662)
Philippe de la Hire (1640-1718)
Isaak Newton (1643-1727)
Germinal Pierre Dandelin (1774-1844)
Charles-Julien Brianchon (1783-1864)
David Rytz von Brugg (1801-1868)

Trigonometrie

Johannes von Gmunden (ca. 1380-1442)

Georg von Peurbach (1423-1461)

Johannes Müller - Regiomontanus (1436-1476)

Willebrord van Royen - Snell(ius) (1580-1626)

Perspektive

Filippo Brunelleschi (1377-1446)

Leon Battista Alberti (1404-1472)

Piero della Francesca (ca. 1420-1492)

Luca Pacioli (ca. 1445-1517)

Leonardo da Vinci (1454-1519)

Albrecht Dürer (1471-1528)

Giorgio Vasari (1511-1574)

Guido Ubaldi (1545-1606)

Projektive Geometrie

Menelaos von Alexandria (ca. 70 - ca. 130 n.Chr.)

Pappos von Alexandria (ca. 290 - ca. 350 n.Chr.)

Johannes Werner (1468-1522)

Gérard Desargues (1591-1661)

Blaise Pascal (1623-1662)

Philippe de la Hire (1640-1718)

Giovanni Ceva (1647-1734)

Brook Taylor (1685-1731)

Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753-1823)

Joseph Gergonne (1771-1859)

Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

August Ferdinand Möbius (1790-1868)

Michel Chasles (1791-1880)

Jakob Steiner (1796-1863)

Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867)

John Wesley Young (1879-1932)

Oswald Veblen (1880-1960)

Reinhold Baer (1902-1979)

Darstellende Geometrie

Albrecht Dürer (1471-1528)

Gaspard Monge (1746-1818)

Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834)
Barnabé Brisson (1777-1828)
Karl Wilhelm Pohlke (1810-1876)
Walter Wunderlich (1910-1998)

Analytische Geometrie

René Descartes (1596-1650)
Pierre de Fermat (1601-1665)
John Wallis (1616-1703)
Isaak Newton (1643-1727)

Lineare Algebra

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
August Ferdinand Möbius (1790-1868)
Viktor Jakowlewitsch Bunjakowski (1804-1889)
Hermann Günther Graßmann (1809-1877)
James Joseph Sylvester (1814-1897)
Arthur Cayley (1821-1895)
Enrico Betti (1823-1892)
Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Differentialgeometrie

Christiaan Huygens (1629-1695)
Isaak Newton (1643-1727)
Leonhard Euler (1707-1783)
Alexis-Claude Clairaut (1713-1795)
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Integralgeometrie und geometrische Wahrscheinlichkeiten

Georges-Louis Leclerc Buffon (1707-1788)
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
Jakob Steiner (1796-1863)
Joseph Bertrand (1822-1900)
Morgan William Crofton (1826-1915)
Emanuel Czuber (1851-1925)
Wilhelm Johann Eugen Blaschke (1885-1962)

Diskrete Geometrie

Johannes Kepler (1571-1630)

Jean-Baptiste de la Place (1755-1793)
Georgij Feodosjewitsch Voronoi (1868-1908)
Laszló Fejes Tóth (1915-2005)

Konvexe Geometrie

Leonhard Euler (1707-1783)
Hermann Minkowski (1864-1909)
Constantin Carathéodory (1873-1950)
Johann Radon (1887-1956)
Stefan Banach (1892-1945)
Hugo Hadwiger (1908-1981)

Parallelenproblem

Proklos Diadochos (410/11-485 n.Chr.)
Ibn al-Haitham, latinisiert Alhazen (um 965-1039)
Christophorus Clavius (1537-1612)
John Wallis (1616-1703)
Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733)
Johann Heinrich Lambert (1738-1777)
John Playfair (1748-1819)
Adrien-Marie Legendre (1752-1839)
Farkas Bolyai (1775-1856)

Nichteuklidische Geometrie

John Playfair (1748-1819)
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
Ferdinand Karl Schweikart (1780-1857)
Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793-1856)
János Bolyai (1802-1860)
Arthur Cayley (1821-1895)
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)
Eugenio Beltrami (1835-1900)
Felix Klein (1849-1925)
Henri Poincaré (1854-1912)
Hermann Minkowski (1864-1909)
Albert Einstein (1879-1955)

Axiomatik

Euklid von Alexandria (ca. 360 - ca. 290 v.Chr.)

Moritz Pasch (1843-1930)

Felix Klein (1849-1925)

Hermann Wiener (1857-1939)

Guiseppe Peano (1858-1932)

David Hilbert (1862-1943)

Die Vielfalt der Teilgebiete der Geometrie kann dazu beitragen, dass man den Überblick verliert. *Felix Kleins* Erlanger Programm (1872) bietet eine effiziente Orientierungshilfe. (Siehe dazu [8], "Zweiter Teil: Die geometrischen Transformationen"):

In etlichen Teilgebieten der Geometrie interessiert man sich nämlich für jene Transformationen, die bestimmte Eigenschaften nicht zerstören (ihre sogenannten Automorphismen): Zum Beispiel ändern weder eine Parallelverschiebung noch eine Drehung oder Spiegelung in einer zweidimensionalen euklidischen Geometrie die Abstände von Punkten. Umgekehrt ist jede Transformation, die die Abstände von Punkten nicht ändert, eine Zusammensetzung von Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (vgl. Abschnitt 3.5.2 "Wiederholung der Bewegungen im \mathbb{R}^2 "). Man sagt, dass diese Abbildungen die Transformationsgruppen bilden, die zu einer ebenen euklidischen Geometrie gehört, und dass der Abstand zweier Punkte eine euklidische Invariante darstellt. *Felix Klein* hat in seinem Erlanger Programm die Geometrie allgemein als die Theorie der Transformationsgruppen und ihrer Invarianten definiert. Im Folgenden sind einzelne Teilgebiete und prominente Invarianten aufgezählt:

- Projektive Geometrie: Invarianten sind die Kollinearität von Punkten und das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden.
- Affine Geometrie: Die Parallelität von Geraden, die Teilverhältnisse von drei Punkten einer Geraden, Flächeninhaltsverhältnisse.
- Ähnlichkeitsgeometrie; zusätzlich sind Streckenverhältnisse und Winkel invariant.
- Euklidische Geometrie; zusätzliche Invarianten sind die Abstände von Punkten und Winkel.

Neben den hier genannten klassischen Geometrien, die alle durch Einschränkung der Transformationsgruppe aus der projektiven Geometrie hervorgehen, kann man auf diese Art von der projektiven Geometrie auch zur elliptischen und zur hyperbolischen Geometrie gelangen, die nichteuklidischen Geometrien lassen sich also auch nach dem Erlanger Programm klassifizieren.

Allerdings reicht das Erlanger Programm nicht für eine vollständige Klassifizierung aller Geometrien aus: zum Beispiel kann die der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegende Riemannsche Geometrie durch diese Klassifizierung nicht erfasst werden.

5.4 Verwendete Literatur

Die folgende Zusammenstellung gibt die Literatur wieder, die in den einzelnen Abschnitten hauptsächlich verwendet wurde - sofern diese nicht "Folklore" bzw. eigene Aufzeichnungen sind.

Abschnitt 1 Einleitung: [39], S. 3-8; [37], S. 82; [15], S. 317-318; [13], S. 98-105

Abschnitt 2: Synthetische Geometrie

Abschnitt 2.1 Kegelschnitte

2.1.1 Einstieg: [20], §1 Ebene Kurven; [12], S. 46-48; [46]

2.1.2 Erarbeitung mit Hilfe der Darstellenden Geometrie: [5], III. Kreis und Kugel und IV. Kegelschnitte

Abschnitt 2.2 Die Zentralperspektive

2.2.1 Der Satz von Pappos: [25], S. 129-137; [48], S. 55; [9], S. 67-69; [14], S. 72-74

2.2.2 Ausblick: Pappos und die harmonische Teilung: [21], S. 137-141

2.2.3 Übungsaufgabe zur Zentralperspektive: [20], S. 99-100; [52]

2.2.4 Der Satz von Desargues: [9], S. 45-50; [14], S. 74-76

2.2.5 Ausblick: Falsche Perspektive: [31], S. 355-356

Abschnitt 3: Analytische Geometrie

Abschnitt 3.1 Ausgewählte Texte aus Descartes' Geometrie: [10], Buch I und Buch II; [53], S. 68-75; [45]; [17], S. 49-51

Abschnitt 3.2 Tangentenkonstruktion für die Kegelschnitte nach Fermat: [29], S. 109-111

Abschnitt 3.3 Darstellung der Kegelschnitte in Cartesischen Koordinaten

3.3.1 Parabel, [36], S. 95

3.3.2 Ellipse und Hyperbel, [37], S. S. 75

3.3.3 Darstellung mit Hilfe einer Leitlinie, [31], S. 71

3.3.4 Darstellung in Polarkoordinaten

3.3.5 Archimedes' Quadratur der Parabel: [26], S. 153 ff

3.3.6 Klassifikation der Kegeschnitte mit Hilfe von Schwerlinien, [2], S. 128 ff

Abschnitt 3.4 Anwendungen der Kegelschnitte

3.4.1 Das Delische Problem: [31], S. 40-44

3.4.2 Physik und Astronomie: [22], S. 122-123; [34], S. 68; [49], S. 32; [55]; [11], S. 437-438; [44], S. 7-13; [40], S. 16-21; [59], S. 45; [27], p. 141; [24], p. 158

3.4.3 Optik, Akustik und Architektur: [57]; [54]; [50], S. 37-45; [58], S. 7-8; <http://ars.messala.de> (01.2011)

Abschnitt 3.5 Quadriken

3.5.1 Normalformtypen: [39], S. 121 und S. 124-127

3.5.2 Wiederholung zu Bewegungen (Isometrien) im \mathbb{R}^2 : [39], S. 176-183

3.5.2 Quadriken: [37], S. 291, 300 und 308-309

Abschnitt 3.6 Hüllkurven und Krümmung

3.6.1 Hüllkurven einer Geradenschar: [23], S. 98-106; [28], S. 246-252

3.6.2 Krümmungsradius und Krümmung: [37], S. 210; [32], S. 182-186; [38], S. 26-28; [19], S. 152-156

3.6.3 Ausblick: Traktrix und Kettenlinie. [23], S. 135-136; [35], S. 423-424; [31], S. 410-414; [37], S. 211-214

Abschnitt 4 Ausblick

Abschnitt 4.1 Anmerkungen zur Axiomatik: [30], S. 1-3; [39], S. 4-5 und S. 7-12; [31], S. 418-430; [33], S. 105

Abschnitt 4.2 Hyperbolische Geometrie: Poincarés Kreismodell

4.2.1 Der Arcustangens hyperbolicus

4.2.2 Der Cosinus hyperbolicus

4.2.3 Spiegelungen am Einheitskreis

4.3 Ausblick: [18], S. 139-178; [19], S. 82 ff; [31], S. 578-579

Abschnitt 5 Anhang

Abschnitt 5.1 Darstellung der Kegelschnitte aus dreidimensionaler Sicht: [5], S. 66-84

Abschnitt 5.2 Kosmische Geschwindigkeiten und Keplers Radiengesetz: [35], S. 180-183; [37], S. 147-150; [6], 145-170

Abschnitt 5.3 Teilgebiete der Geometrie: [31]; [39], S. 20-21; <http://de.wikipedia.org/wiki/Geometrie> (01.2011)

Chapter 6

Übungsaufgaben

Aufgaben zu Abschnitt 2.1 Kegelschnitte

A 1. Eine Parabel lässt sich, wie auf den Seiten 3 und 4 in [20] beschrieben, durch Grenzübergang aus einer Ellipse erhalten, bei welcher man einen ihren beiden Brennpunkt und den diesem nächstgelegenen Scheitel festhält und den zweiten Brennpunkt entlang der Achse der Ellipse nach Unendlich verschiebt.

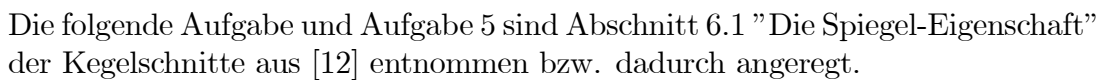
Anmerkung: *Johannes Kepler* (1571 - 1630) sagt in diesem Zusammenhang, dass die Parabel im Unendlichen einen "blinden Brennpunkt" (caesus focus) habe.

(a) Machen Sie sich - und anderen - die Aussage

"Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden gleiche Abstände haben." (0)

ausgehend von der knappen einschlägigen Anmerkung in [20] mithilfe des Einsatzes von GeoGebra klar.

(b) Führen Sie, ausgehend von einer Hyperbel (siehe nachstehende Abbildung) den analogen Grenzübergang durch und weisen Sie Aussage (0) auch in diesem Zusammenhang her.



(a) Visualisieren Sie diese Aussage mit Hilfe von GeoGebra und
(b) begründen Sie sie.

- (a) Eigene empirische Durchführung
- (b) Visualisierung mittels GeoGebra

(b) Variieren Sie den Durchmesser der Scheibe: Wählen Sie für diesen anstelle der Hälfte des Durchmessers der Tortenform, $1/3$ bzw. $2/5$ desselben, das $1/(2 \cdot \sqrt{2})$ -fache desselben.

(a) Visualisieren Sie diese Aussage mit Hilfe von GeoGebra und
(b) begründen Sie sie.

A 6. Realisieren Sie die Konstruktion der Kegelschnitte mit Hilfe deren Tangenteneigenschaften nach den Darstellungen von *Frans van Schooten* mittels GeoGebra

- (a) für die Parabel,
- (b) für die Ellipse und
- (c) für die Hyperbel.

Die folgenden fünf Ausgaben beziehen sich auf
W. Wunderlich: DARSTELLEND GEOMETRIE I.

A 7. Wiederholen Sie Abschnitt 27. *Parabelschnitt des Drehkegels* und machen Sie sich die Aussagen hinsichtlich der *Tangente* t im Parabelpunkt P (Absatz S. 77 unten und S. 78 oben) klar.

A 8. Wiederholen Sie Abschnitt 23. *Ellipse als Zylinderschnitt* und machen Sie sich die Aussagen hinsichtlich der *Tangente* t im Ellipsenpunkt P (1. Absatz auf S. 65) klar.

A 9. Wiederholen Sie Abschnitt 24. *Ellipse als Kegelschnitt* und machen Sie sich die Aussagen hinsichtlich der *Tangente* t von k in P (2. Absatz auf S. 69) klar.

A 10. Wiederholen Sie Abschnitt 25. *Hyperbelschnitt des Drehkegels* und machen Sie sich die Aussagen hinsichtlich der *Tangente* t in P (S. 71 unten und S. 72 oben) klar.

A 11. Ein Kegelschnitt sei durch folgende drei Angaben im Sinn von Abb. 80 in *Darstellende Geometrie I* von *W. Wunderlich* gegeben:

1. eine Leitlinie l_1 (parallel zur y -Achse),
2. einen Brennpunkt F_1 (rechts von l_1 auf der x -Achse gelegen) und
3. einen Punkt P_1 des Kegelschnitts. Dieser liege vertikal über F_1 .

Konstruieren Sie den zugehörigen Kegelschnitt.

Berücksichtigen Sie dabei folgenden Sachverhalt, welcher für alle derart gegebenen Kegelschnitte gilt:

Sei L_1 der Schnittpunkt der Leitlinie l_1 mit der x -Achse. Dann ist die Gerade g_1 durch die Punkte L_1 und P_1 eine Tangente an den Kegelschnitt. (Dieser Sachverhalt wurde in der Vorlesung für den Fall der Ellipse gezeigt.)

Der Anstieg der Tangente g_1 ist im Fall einer Parabel $\varepsilon = 1$.
 Im Fall von Ellipse und Hyperbel ist dieser Anstieg gleich der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Behandeln Sie die Fälle

- (a) einer Parabel (siehe dazu Abb. 75),
 (b) einer Ellipse (benutzen Sie dabei zur Konstruktion des zweiten Brennpunkts F_2 die in Abb. 62 dargestellte Tangenteneigenschaft) und
 (c) einer Hyperbel (benutzen Sie dabei zur Konstruktion des zweiten Brennpunkts F_2 die in Abb. 69 dargestellte Tangenteneigenschaft)
 mittels GeoGebra.

Aufgaben zu Abschnitt 2.2 Die Zentralperspektive

A 12. Beweisen Sie (a) den Zentriwinkelsatz und (b) Anmerkung 2 in Abschnitt 2.2.1.

A 13. (a) Weisen Sie nach, dass die in Anmerkung 1 von Abschnitt 2.2.2 angegebene Beziehung

$$(ACBD) - (ABCD) = 1$$

gilt.

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass von drei aufeinander folgenden Gliedern der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

das mittlere das harmonische Mittel seiner beiden benachbarten Glieder ist.

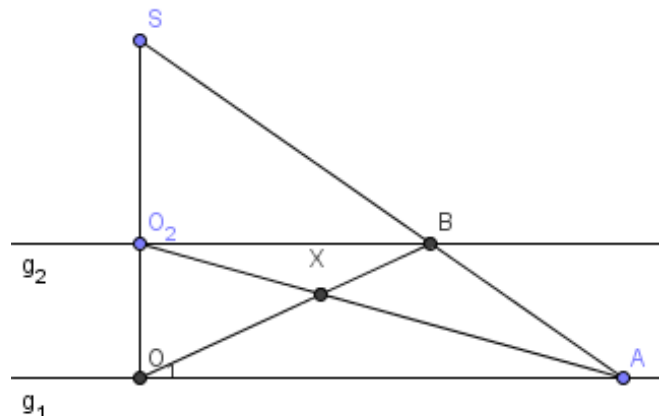
A 14. In der folgenden Abbildung seien die Punkte O_1, O_2 und S fest. Indem man den Punkt A auf der Geraden g_1 bewegt, bewegen sich auch die Punkte B und der Schnittpunkte X der beiden Geraden durch die Punkte O_1 und B bzw. O_2 und A , wobei sich offenbar B auf der Geraden g_2 bewegt.

- (a) Überzeugen Sie sich mittels GeoGebra davon, dass sich der Punkt X auf einer Geraden g bewegt, welche parallel zu g_1 und g_2 ist.
 (b) Beweisen Sie diesen Sachverhalt analytisch.

Hinweis: Verwenden Sie dabei die Bezeichnungen $H = O_1S$, $h = O_2S$, $a = O_1A$ und

$$y_0 = \frac{(H - h) \cdot H}{H + h}$$

und zeigen Sie, dass g die Gleichung $y = y_0$ besitzt.



A 15. (a) Überzeugen Sie sich mittels GeoGebra von der Richtigkeit von Anmerkung 4 im Abschnitt 2.2.1 und (b) versuchen Sie, diese zu beweisen.

Hinweis: Von der Gültigkeit der Aussage kann man sich überzeugen, indem man die Abbildung zum Satz zur Zentralprojektion als zentralperspektivisches Bild von parallelen Geraden interpretiert (vgl. dazu Abb. 127 in Abschnitt 2.2.3) und damit die Aussage von Anmerkung 4 auf jene von Aufgabe 14 zurückführt: Dabei ersetzt man die horizontale Gerade g_2 von Aufgabe 14 zweckmäßigerweise durch die Gerade, welche durch die beiden Punkte O_2 und $C = (-d, 0)$, $d > 0$, bestimmt ist. Die Gleichung der Geraden g , welche der Punkt X beschreibt, wenn man $a \in \mathbb{R}$ variiert, ist nun

$$y = \left(\frac{x}{d} + 1\right) \cdot y_0.$$

A 16. Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C in der Ebene. Ermitteln Sie mittels Linearer Algebra den Schwerpunkt S des Dreiecks.

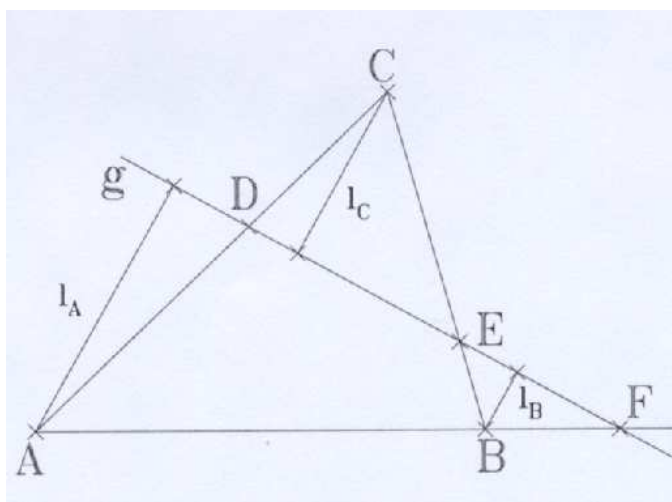
A 17. Lektüre des Artikels "Projective Geometry" von *M. Kline* [47].

A 18. Der Satz von Menelaos¹: Wird ein Dreieck ABC von einer Gerade g geschnitten, wobei diese nicht durch einen der Eckpunkte verläuft,

¹Dieser Satz von *Menelaos von Alexandria* (ca. 70 - ca. 130 n.Chr.) - auch Transversalensatz genannt - findet sich in dessen Werk "Spherica". Er ist der erste erhaltene Satz der Literatur zu jenem Teilgebiet der Geometrie, welches eng mit dem Thema *Zentralprojektion* verknüpft ist und heutzutage *Projektive Geometrie* genannt wird.

so werden zwei Dreiecksseiten - in der vorliegenden Abbildung AC und BC - durch die Schnittpunkte D bzw. E geteilt. Sei weiters F der Schnittpunkt von g mit der Verlängerung der dritten Seite, nämlich der Seite AB . Dann gilt die Beziehung

$$\frac{(AD)}{(CD)} \cdot \frac{(CE)}{(BE)} \cdot \frac{(BF)}{(AF)} = 1. \quad (1)$$

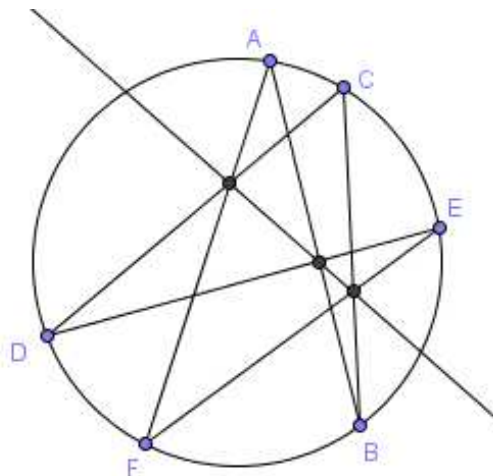


Seien l_A , l_B und l_C die Längen der Vertikalabstände der Eckpunkte des Dreiecks ABC von der Gerade g . Beweisen Sie (1) mit Hilfe der Ähnlichkeit geeigneter Hilfsdreiecke.

A 19. Satz von Pascal: Liegen die Eckpunkte eines willkürlich gewählten Sechseck auf einem Kegelschnitt, so liegen die Schnittpunkte der drei gegenüberliegenden Seitenpaare auf einer Geraden, der sogenannten Pascalgeraden.

- Illustrieren Sie den Satz von Pascal für den Fall einer Ellipse mittels GeoGebra. Hinweis: Für einen Kreis mag nachstehende Abbildung als Orientierungshilfe dienen. Beachten Sie zudem, dass die 6 Punkte auf $5!/2 = 60$ wesentlich verschiedene Arten auf dem Kreis angeordnet werden können.
- Begründen Sie, warum es ausreicht, den Satz für den Spezialfall eines Kreises zu beweisen um diesen für einen allgemeinen Kegelschnitt zu zeigen.
- Studieren und präsentieren Sie Abschnitt 3.8 "Der Satz von Pascal" (S.

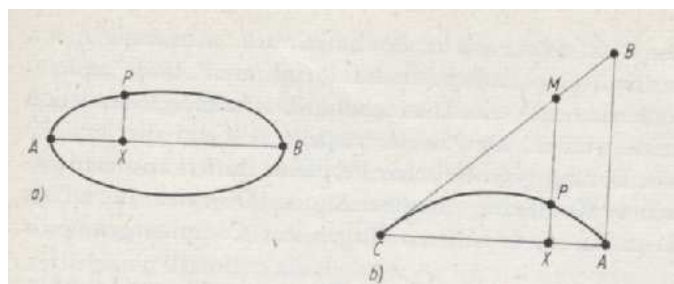
78-81) aus [14].



Aufgaben zu Abschnitt 3.1 Ausgewählte Texte aus Descartes' Geometrie

A 20. Die "Alten" beschrieben die Gleichung einer Kurve durch ein sogenanntes "Symptom" (aus [17], S. 49-51). Übertragen Sie die folgenden beiden Symptome durch geeignete Parametrisierung in Cartesische Koordinaten.

$$(a) \frac{PX \cdot PX}{AX \cdot BX} = c, \quad c > 0 \quad (b) \frac{PX}{MX} = \frac{AX}{AC}.$$



A 21 (Goldener Schnitt): Der *goldene Schnitt* ist bekanntlich durch folgendes Teilungsverhältnis ² definiert:

²Dieses von *Euklid* beschriebenen Teilungsverhältnis geht auf die Pythagoräer zurück. Die Bezeichnung *divina proportio* (*göttliches Verhältnis*) hat der Franziskaner *Luca Pacioli* in seinem gleichnamigen Werk aus dem Jahre 1509 geprägt.

”Es teilt eine gegebene Strecke in zwei ungleiche Abschnitte, deren kleinerer sich zum größeren so verhält, wie dieser zur ganzen Strecke.”

Bezeichnen m und M die Längen von kleinerer und größeren Strecke, dann gilt demgemäß

$$\frac{m}{M} = \frac{M}{M+m}.$$

(a) Konstruieren Sie den goldenen Schnitt mittels ähnlicher Dreiecke.

(b) Ermitteln Sie den goldenen Schnitt $x = \frac{m}{M}$ analytisch.

Anmerkung: Vielfach wird auch die Zahl

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

als *goldener Schnitt* bezeichnet (die Zahl Φ entspricht der Größe $(M + m)/M$). Ein Rechteck mit der Länge Φ und der Breite 1 nennt man ein *goldenes Rechteck*. Die Tatsache, dass viele wunderschöne antike Bauten, speziell das Parthenon auf der Akropolis in Athen, perfekt in ein goldenes Rechteck passen, hat dazu geführt, dass die Größe $(\sqrt{5} + 1)/2$ zu Ehren seines Bildhauers/Architekten *Phidias* (ca. 500 - ca. 432 v.Chr.) mit seinem Anfangsbuchstaben abgekürzt wird.

A 22. Veranschaulichen Sie die in der Vorlesung vorgeführte Konstruktion der Tangente an die Parabel

$$y^2 = 2px$$

im Punkt $(p/2, p)$ nach *Descartes* mittels GeoGebra.

A 23. Gegeben sei die Hyperbel \mathcal{H}

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

in erster Hauptlage und sei $e = \sqrt{a^2 + b^2}$. (a) Konstruieren Sie - wie in der Vorlesung am Beispiel der Parabel vorgeführt - nach *Descartes* an \mathcal{H} die Tangente im Punkt $(e, \frac{b^2}{a})$ und (b) visualisieren Sie Ihre Vorgangsweise mittels GeoGebra für den Fall $a = b$.

Hinweis: Beschränken Sie sich dabei o.B.d.A. auf den Spezialfall $a = 1$. Für diesen lautet (a) im Hinblick auf $e^2 = a^2 + b^2$ und $\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$ wie folgt:

(a') Konstruieren Sie - wie in der Vorlesung am Beispiel der Parabel vorgeführt - nach *Descartes* an die Hyperbel \mathcal{H}

$$x^2 - \frac{y^2}{\varepsilon^2 - 1} = 1$$

die Tangente im Punkt $(\varepsilon, \varepsilon^2 - 1)$.

A 24. Gegeben sei die Ellipse \mathcal{E}

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

in erster Hauptlage und sei $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. (a) Konstruieren Sie - wie in der Vorlesung am Beispiel der Parabel vorgeführt - nach *Descartes* an \mathcal{E} die Tangente im Punkt $(-e, \frac{b^2}{a})$ und (b) visualisieren Sie Ihre Vorgangsweise mittels GeoGebra.

Hinweis: Beschränken Sie sich dabei o.B.d.A. auf den Spezialfall $a = 1$. Für diesen lautet (a) im Hinblick auf $e^2 = a^2 - b^2$ und $\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$ wie folgt:

(a') Konstruieren Sie - wie in der Vorlesung am Beispiel der Parabel vorgeführt - nach *Descartes* an die Hyperbel \mathcal{E}

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = 1$$

die Tangente im Punkt $(-\varepsilon, 1 - \varepsilon^2)$.

Aufgaben zu Abschnitt 3.2 Tangentenkonstruktion für die Kegelschnitte nach Fermat

A 25. Beweisen Sie Anmerkung 2 in Abschnitt 3.2.

A 26. Beweisen Sie Anmerkung 3 in Abschnitt 3.2.

A 27. Gegeben sei eine Ellipse \mathcal{E} in erster Hauptlage. Die Länge der großen Halbachse sei a , die der kleinen Halbachse sei $b < a$. $S_1 = (-a, 0)$ und $S_2 = (a, 0)$ sind daher die Hauptscheitel der Ellipse und $F_1 = (-e, 0)$ und $F_2 = (e, 0)$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, ihre Brennpunkte. Weiters sei $P = (x_0, y_0) \in (-a, a) \times (0, b)$ eine Punkt der Ellipse und t die Tangente an \mathcal{E} im Punkt P .

Bekanntlich hat die Gleichung von t die Form

$$y(x) = k\left(x + \frac{a^2}{x_0}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad k = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

(a) Berechnen Sie $h_1 = y(-a)$ und $h_2 = y(a)$ und (b) weisen Sie nach, dass gilt

$$h_1 \cdot h_2 = b^2 = a^2 - e^2 = (a - e) \cdot (a + e)$$

bzw.

$$\frac{h_1}{a - e} = \frac{a + e}{h_2} . \quad (*)$$

Seien nun $H_1 = (-a, h_1)$ und $H_2 = (a, h_2)$ die beiden Punkte, welche auf der Tangente t genau über den beiden Scheiteln S_1 und S_2 liegen. Dann ist (*) gleichbedeutend damit, dass die beiden Winkel $H_1F_1H_2$ und $H_1F_2H_2$ rechte Winkel sind oder, anders ausgedrückt, dass der Thaleskreis, welchen man über und unter den beiden Punkten H_1 und H_2 errichtet, die x -Achse (d.i. die Hauptachse von \mathcal{E}) in den beiden Brennpunkten schneidet.

(c) Illustrieren Sie diesen - bereits *Applonius von Perge* bekannten - Sachverhalt mittels GeoGebra.

Aufgaben zu Abschnitt 3.3 Darstellung der Kegelschnitte in Cartesischen Koordinaten

A 28. Die Rytzsche Achsenkonstruktion: Studieren Sie folgenden Text

Definition: *Konjugierte Ellipsendurchmesser* sind zwei solche Durchmesser einer Ellipse, bei denen jeder parallel zu den beiden Tangenten in den Endpunkten des jeweils anderen Durchmessers ist.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Konstruktion von konjugierten Ellipsendurchmessern mit Hilfe der Zweikreiskonstruktion nach de la Hire.

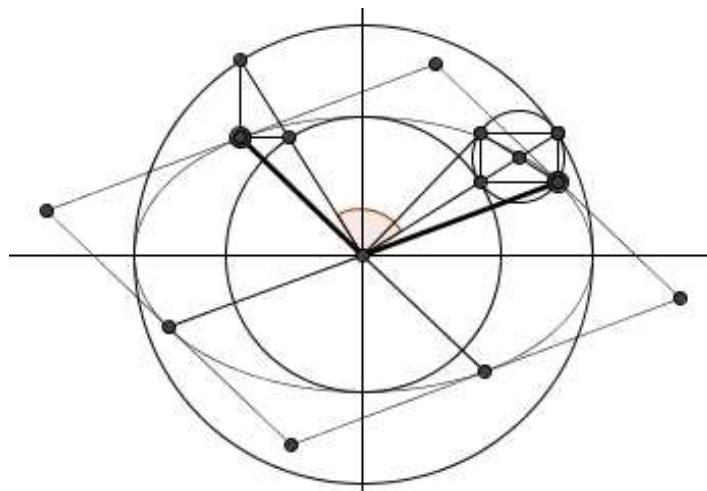


Abb. 1: Konjugierte Ellipsendurchmesser

Die Rytzsche Achsenkonstruktion ³ ermöglicht es, ausgehend von zwei konjugierten Ellipsendurchmessern Lage und Länge der Halbachsen der Ellipse zu finden.

Die folgende Abbildung illustriert deren Vorgehensweise.

Wir gehen von den durch die Strecken MU und MV gegebenen konjugierten Ellipsendurchmessern aus, wobei wir $MU > MV$ voraussetzen.

1. Schritt: Man ermittle den Hilfspunkt U' , welcher durch Drehung des Punktes U um 90° um den Mittelpunkt M entsteht,
2. Schritt: Man konstruiere den Mittelpunkt $W = (U' + V)/2$ der Punkte U' und V ,
3. Schritt: Man errichte einen Kreis \mathcal{K} mit Mittelpunkt W und Radius $r = WU' = WV$,
4. Schritt: Man ermittle die beiden Schnittpunkte S'_1 und S'_2 des Kreises \mathcal{K} mit der Geraden durch die Punkte M und W .

Lage und Länge der Halbachsen sind:

◦ Die großen Halbachsen liegen auf der Geraden durch den Mittelpunkt M , welche parallel zur Strecke $U'S'_1$ ist,

ihre Länge ist $a = MS'_1 = MS_1$,

◦ Die kleinen Halbachsen liegen auf der Geraden durch den Mittelpunkt M , welche parallel zur Strecke VS'_1 ist,

³David Rytz von Brugg (1801-1868), Schweizer Erfinder

ihre Länge ist $b = MS'_2 = MS_2$.

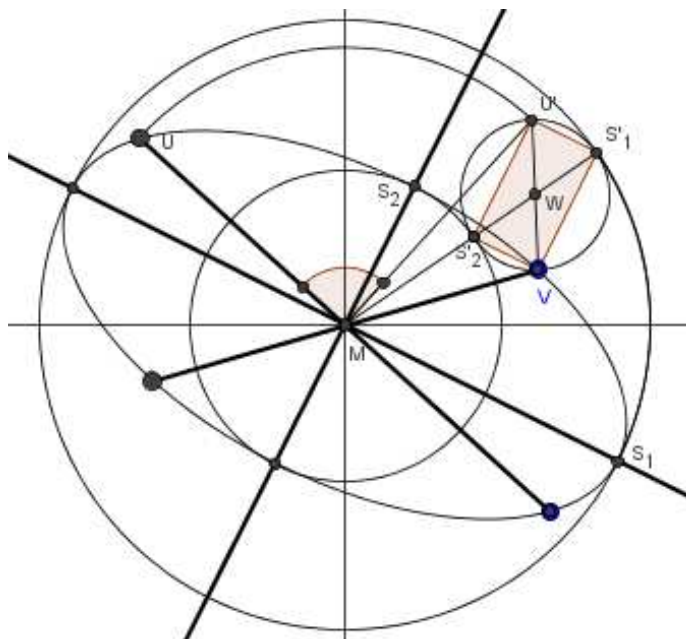


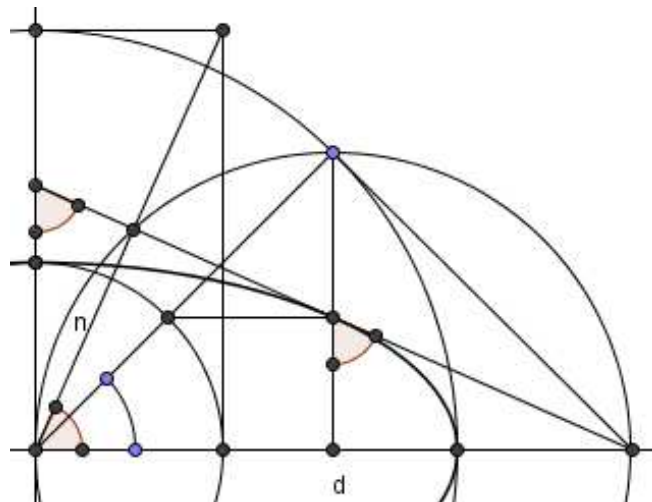
Abb. 2: Rytzsche Achsenkonstruktion

A 29 zu Anmerkung 2 in Abschnitt 3.3.2: Ist diese Argumentation stichhaltig? Wenn ja, warum?

A 30 zum Satz bzw. zu Anmerkung 3 in Abschnitt 3.3.2:

(a) Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit des Satzes für den Fall, dass \mathcal{C} das Quadrat $[-a, a] \times [-a, a]$ ist,

Bezeichne in der Abbildung



φ den Polarwinkel, α den Normalwinkel und $n(\alpha)$ den Normalabstand. Verifizieren Sie (b) zunächst die Beziehung

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \tan \alpha$$

zwischen Polar- und Normalwinkel und (c) dann die Darstellung

$$n(\alpha) = a \cdot \sqrt{1 - (\varepsilon \sin \alpha)^2}, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

für den Normalabstand.

A 31. Gegeben sei eine Ellipse \mathcal{E} in erster Hauptlage. Die Länge der großen Halbachse sei a , die der kleinen Halbachse sei $b < a$. Weiters sei P eine Punkt der Ellipse und t die Tangente in P an \mathcal{E} .

Projiziert man die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 von \mathcal{E} auf die Tangente t , so liegen die beiden Projektionspunkte R_1 und R_2 auf einem Kreis mit Radius a durch den Mittelpunkt M von \mathcal{E} .

(a) Illustrieren Sie diesen Sachverhalt mittels GeoGebra und (b) begründen Sie ihn auf geometrischem Weg.

Seien $\varphi \in (0, \pi)$ der Winkel, welchen die Tangente t mit der Abszisse einschließt und $d_1(\varphi) = F_1 R_1$ und $d_2(\varphi) = F_2 R_2$ die Abstände der Brennpunkte

F_1 bzw. F_2 von der Tangente t . Dann ist der Umfang $U(\mathcal{E})$ der Ellipse gleich dem Integral

$$\int_0^\pi (d_1(\varphi) + d_2(\varphi)) d\varphi .$$

(c) Machen Sie sich und anderen diese Aussage im Hinblick auf den in Abschnitt 3.3.2 angegebenen Satz klar.

Anmerkung: Offensichtlich gilt für den Umfang $U(\mathcal{E})$ der Ellipse

$$2b\pi < U(\mathcal{E}) < 2a\pi .$$

Jonhannes Kepler (1571 – 1630) hat den Umfang der Ellipse durch das arithmetische Mittel

$$U(\mathcal{E}) \cong (a + b)\pi$$

der beiden Schranken geschätzt.

A 32. Gegeben seien eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b in erster Hauptlage, $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ ihre numerische Exzentrizität und (x, y) ein allgemeiner Punkt der Hyperbel. Für den Quotienten der Abstände des allgemeinen Punktes (x, y) vom Brennpunkt $(a\varepsilon, 0)$ und von der zugehörigen Leitlinie $x = \frac{a}{\varepsilon}$ gilt

$$\frac{\sqrt{y^2 + (x - \varepsilon a)^2}}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon .$$

Verifizieren Sie dies analog zur Vorgangsweise für die Ellipse in der Vorlesung.

A 33. (a) Zeigen Sie die Gültigkeit der asymptotischen Beziehung

$$\sqrt{1 + x^2} \sim 1 + \frac{1}{2}x^2 , \tag{1}$$

welche bekanntlich ist die Kurzschreibweise für folgende Aussage ist

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

(b) Um welche Kegelschnitte handelt es sich bei den beiden in (1) betrachteten Funktionen $y = f(x)$ und welches sind deren Parameter ? (c) Stellen Sie die beiden Funktionen mittels GeoGebra dar.

A 34. (a) Illustrieren Sie die in Abschnitt 3.3.6 unter "Charakterisierung der Parabel" getroffenen Aussagen mittels GeoGebra und (b) weisen Sie sie analytisch nach.

A 35. (a) Illustrieren Sie die in Abschnitt 3.3.6 unter "Charakterisierung von Ellipse und Hyperbel" getroffenen Aussagen mittels GeoGebra und (b) weisen Sie sie analytisch nach.

A 36. Der irakische Gelehrte *Ibrahim ibn Sinan* (908/9 - 946) beschreibt folgendes Verfahren zur Konstruktion einer Hyperbel:

Über einer horizontalen Strecke S_2S_1 zeichne man einen Halbkreis \mathcal{H} . Dann wähle man einen Punkt $A \in \mathcal{H}$, lege in diesem eine Tangente an den Halbkreis \mathcal{H} und schneide diese mit der Achse a , welche die Strecke S_2S_1 verlängert. In dem erhaltenen Schnittpunkt B errichte man eine Gerade g , welche mit der Achse a einen vorgegebenen festen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ einschließt. Die Gerade g schneide man mit dem Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BA . Dann liegen die beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 auf einer Hyperbel.

- (a) Führen Sie diese Konstruktion mittels GeoGebra durch,
- (b) prüfen Sie die Aussage für den Spezialfall, dass die Gerade g auf der Achse a normal steht, analytisch nach und
- (c) leiten Sie die analytische Darstellung der Hyperbel her, wobei der Parameter $k = \tan \varphi$ sei.

A 37. Der irakische Gelehrte *Ibrahim ibn Sinan* (908/9 - 946) und der deutsche Pfarrer *Johannes Werner* (1468 – 1522) beschreiben folgendes Verfahren zur Konstruktion einer Parabel.

Auf eine waagrechten Achse a wähle man - von links nach rechts - zwei feste Punkte B und O und einen weiteren variablen Punkt A rechts von B . Durch die Punkte O und A zeichne man zwei parallele Geraden g_1 und g_2 , die normal auf der Achse a stehen. Dann zeichne man einen Kreis \mathcal{K} , dessen Mittelpunkt auf der Achse a liegt und der die beiden Punkte B und A enthält. Nun schneide man den Kreis \mathcal{K} mit der Geraden g_1 durch O . Durch die beiden Schnittpunkte lege man je eine zur Achse a parallele Gerade. Dann liegen deren beide Schnittpunkte $P_1 = P_1(A)$ und $P_2 = P_2(A)$ mit der Geraden g_2 durch A auf einer Parabel.

- (a) Führen Sie diese Konstruktion mittels GeoGebra durch und

- (b) prüfen Sie diese Aussage analytisch nach.
- (c) Beantworten Sie die Frage, welcher Kegelschnitt entsteht, wenn die beiden parallelen Geraden g_1 und g_2 mit der Achse a einen vorgegebenen Winkel $\varphi \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$ einschließen und begründen Sie Ihre Aussage.

A 38. Verifizieren Sie, dass für die in der obigen Aufgabe betrachteten Hyperbel wie im Fall der betreffende Ellipse gilt

$$r(\varphi) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

wobei hier $l = a(\varepsilon^2 - 1)$ ist.

39 (vgl. *W. Wunderlich: Darstellende Geometrie I*, S. 69, zweiter Absatz).

- (a) Überzeugen Sie sich - und andere - mit Hilfe von GeoGebra von der Richtigkeit der folgenden Aussage:

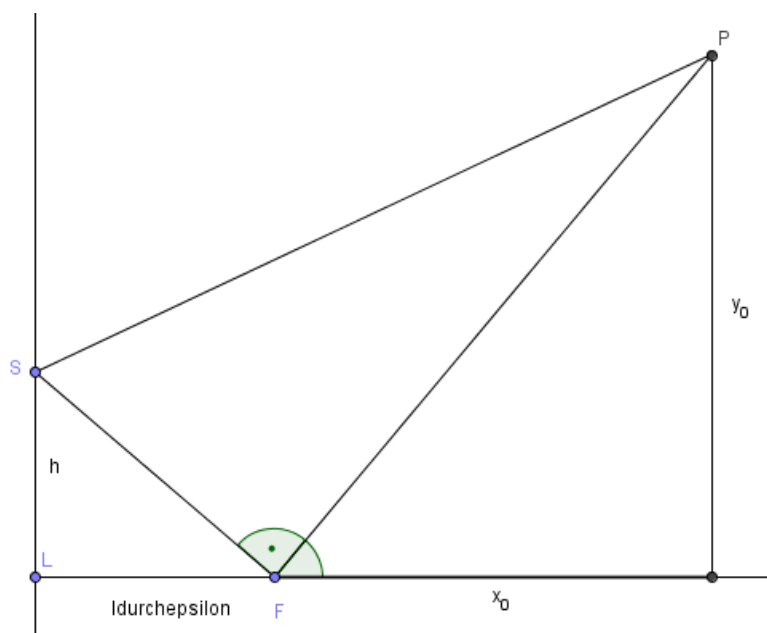
"Für alle Tangenten eines beliebigen, nicht entarteten Kegelschnitts - mit Ausnahme des Kreises - erscheint das Stück zwischen Berührungspunkt und einer Leitlinie vom zugehörigen Brennpunkt aus unter einem rechten Winkel."

Gehen Sie - wie in Wunderlich, S. 83, Abbildung 80 - von einer festen Leitlinie l und dem zugehörigen festen Brennpunkt F aus und stellen Sie die Aussage (a1) zunächst für die Parabel, (a2) dann für eine Ellipse und (a3) schließlich für eine Hyperbel dar.

- (b) Erbringen Sie den Nachweis der Richtigkeit dieser Aussage auf analytischem Weg, indem Sie die Darstellung

$$r(\varphi) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

der Kegelschnitte in Polarkoordinaten verwenden.



A 40. Hypozykloide und Tusi-Paar: Gegeben sei ein fester Kreis \mathcal{K} mit Radius $R = 1$. Ein zweiter Kreis k mit dem Radius $r < 1$ rolle im Innern des Kreises \mathcal{K} auf dessen Umfang (ohne zu gleiten) im Gegenuhrzeigersinn ab. Zu Beginn der Bewegung berühren einander k und \mathcal{K} im Punkte $(1, 0)$.

(a) Visualisieren die Bewegung mittels GeoGebra für verschiedene Radien r , insbesondere für die Werte $r \in \rho := \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

(b) Beschreiben Sie die analytische Lösung mittels Polarkoordinaten für allgemeines r und

(c) überzeugen Sie sich davon, dass die mittels (a) und (b) erzeugten Bahnkurven jedenfalls für die Werte $r \in \rho$ übereinstimmen.

Anmerkung: Für den Fall $r = \frac{1}{2}$ ergibt sich offensichtlich, dass die durch die Bewegung erzeugte Bahnkurve eine Strecke - nämlich die zwischen $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ist. Der Umstand, dass eine gleichförmige Kreisbewegung eine lineare Bewegung erzeugen kann, ist in der Tat bemerkenswert und hat in der Geschichte höchst interessante Diskussionen ausgelöst. Diese ist mit dem arabischen Astronomen *Nasir ad-Din at-Tusi* (1201 – 1274) verknüpft (siehe [56]).

Aufgaben zu Abschnitt 3.4 Anwendungen der Kegelschnitte

A 41. Lektüre von Abschnitt 2.2 "Galileis Bewegungstheorie - Die vier Axiome" aus [40]

A 42. Eine Kugel verlasse den Gewehrlauf mit einer Geschwindigkeit v . g bezeichne die Erdbeschleunigung. Wie ist der Anstellwinkel $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ des Gewehrlaufs zu wählen, damit die Schussweite s maximal ist?

(a) Stellen Sie zunächst die Gleichung der Bahnkurve der Kugel in geeigneter Weise dar,

(b) lesen Sie daraus die Schussweite $s(\alpha)$ ab und bestimmen Sie daraus wiederum die maximale Schussweite.

A 43. Verifizieren Sie 3.4.2, Anmerkung 2, wobei davon auszugehen ist, dass der Behälter stets nachgefüllt wird, sodass dieser immer randvoll ist.

Seien

$h > 0$... die Höhe des Behälters

$0 \leq h_0 < h$... die Höhe der Ausflussstelle

$x \geq 0$... x -Koordinate eines Teilchens des Stahls

$y \leq h_0$... zugehörige y -Koordinate

(a) Berechnen Sie die Ausflussgeschwindigkeit v . **Hinweis:** Diese ist - dem Betrag nach - gleich der Geschwindigkeit, die ein Masseteilchen erhält, welches - bei Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ - im freien Fall den Weg $s = h - h_0$ zurücklegt.

(b) Stellen Sie x -Koordinate $x(t)$ und y -Koordinate $y(t)$ eines Teilchens des Strahls in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ dar. (Die Anfangswerte sind $x(0) = 0$ und $y(0) = h_0$).

(c) Eliminieren Sie in der parametrischen Darstellung $(x(t), y(t))$ für $t \geq 0$ die Zeit t und stellen Sie y in Abhängigkeit von x dar.

A 44. Durch einen Wasserhahn mit kreisförmiger horizontaler Öffnung (mit Radius r_0) fließe ständig Wasser mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 vertikal nach unten. Da sich zudem die Schwerkraft g auf die Wassermoleküle auswirkt, haben diese nach der Zeitdauer $t \geq 0$ die Geschwindigkeit

$$v_t = v_0 + g \cdot t .$$

Dies bewirkt, dass sich die Wassersäule nach unten verjüngt. Ermitteln Sie den Radius $r = r(h)$ des Querschnitts der Wassersäule in Abhängigkeit

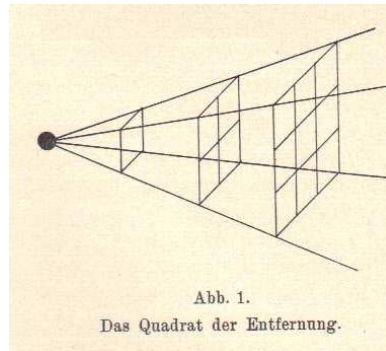
von dessen Höhe $h \geq 0$ (gemessen von der Öffnung des Wasserhahns nach unten).

Anmerkung: Aufgrund der Kohäsion des Wassers geht die Wassersäule für hinreichend große h in Wirklichkeit in Wassertropfen über. Ignorieren Sie diese Tatsache bei Ihrer Berechnung.

A 45. Newtons Gravitationsgesetz (*Isaac Newton*, 1643 – 1727): Zwei Massenpunkte im Abstand r ($r > 0$) mit den Massen m und M ziehen einander mit der Kraft

$$\|F\| = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

an, wobei G eine universelle Konstante ist (Gravitationskonstante $G = 6.668 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$).



"Die Schwerkraft nimmt wie das Licht im Quadrat der Entfernung ab."

Willy Ley (1928), "In den Tiefen des Weltraumes", aus [4]

Leiten Sie das Newtonsche Gravitationsgesetz aus Huygens' Formel für die Zentripetalkraft

$$\|F\| = m \frac{v^2}{r}$$

mit Hilfe des dritten Keplergesetzes

$$T^2 = c \cdot r^3 \quad \text{mit} \quad c = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

- unter der Annahme einer kreisförmigen Bahn mit Radius r - her.

A 46. Seien $r = r_E$ der Radius des Erdäquators, $M = M_E$ die Masse der Erde und m die Masse des Satelliten.

Ermitteln Sie aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz und Huygens' Formel für die Zentripetalkraft die 1. kosmische Geschwindigkeit v_1 .

A 47 (Goldene Ellipse, zu 3.4.3, Anmerkung 5).

Ermitteln Sie

- (a) zunächst die passende numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a}$,
- (b) dann bei vorgegebenem a die Größen b und e ,
- (c) weiters bei vorgegebener Exzentrizität e die Längen von großer und kleiner Halbachse.
- (d) Stellen Sie schließlich die Beziehung zum goldenen Schnitt her (vgl. Aufgabe 21.)

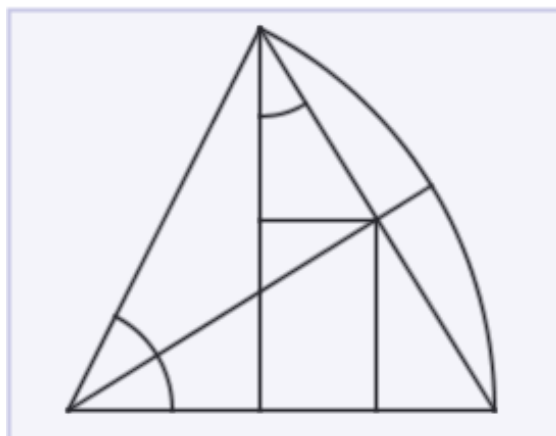
Aufgaben zu Abschnitt 3.5 Quadriken

A 48. Verifizieren Sie anhand nachstehender Abbildung (mit Radius $r = 1$) die Spezialfälle

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{und} \quad \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

der Summensätze

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \text{und} \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$



A 49. (a) Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Aussage von 3.5.3, Anmerkung 3 für den Fall der rechtwinkligen Hyperbel.

(b) Geben Sie Anwendungsbeispiele für eine Beziehung der Form $x \cdot y = c$ mit $c > 0$ an.

A 50. Geben Sie für jede der Lösungen $\alpha \pm k \cdot \frac{\pi}{2}$ für $k \in \{1, 2\}$ in 3.5.3, Anmerkung 3 die zugehörige Transformationsmatrix $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\pm k \cdot \frac{\pi}{2})$ an, welche die Matrix $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\alpha)$ für die Lösung $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ in die Matrix $\mathbb{Q}(\alpha \pm k \cdot \frac{\pi}{2})$ durch Matrixmultiplikation $\mathbb{Q}(\alpha \pm k \cdot \frac{\pi}{2}) = \mathbb{Q}(\alpha) \cdot \mathbb{S}(\pm k \cdot \frac{\pi}{2})$ überführt.

A 51. (a) Klassifizieren Sie die Quadrik

$$(y - x)^2 = c \cdot x \quad \text{mit } c > 0$$

und (b) führen Sie eine Hauptachsentransformation und anschließend eine Parallelverschiebung des Kegelschnitts zum Koordinatenursprung durch.

Frage: Können Sie bereits vor Durchführung einer nennenswerten Rechnung begründet sagen, um welchen Kegelschnitt es sich handelt?

Geben Sie (c) die (den) Parameter des Kegelschnitts und (d) dessen Mittel- bzw. Scheitelpunkt und die Lage seiner Hauptachse(n) an.

A 52. (a) Klassifizieren Sie die Quadrik

$$(1 + c)x^2 - 2xy + y^2 - \frac{c}{4} = 0 \quad \text{mit } c \in (0, 2]$$

und (b) führen Sie eine Hauptachsentransformation durch.

Frage: Können Sie bereits vor Durchführung einer nennenswerten Rechnung begründet sagen, um welchen Kegelschnitt es sich handelt?

Geben Sie (c) die (den) Parameter des Kegelschnitts und (d) dessen Mittel- bzw. Scheitelpunkt und die Lage seiner Hauptachse(n) an.

A 53. Es seien $\sigma_x, \sigma_y, c \in (0, \infty)$ und σ_{xy} derart, dass gilt

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \in (-1, 1).$$

Gehen Sie von dem durch

$$\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho \cdot \frac{x}{\sigma_x} \cdot \frac{y}{\sigma_y} + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2 = c$$

gegebenen Kegelschnitt (mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung) aus und untersuchen Sie diesen o.B.d.A. für den Spezialfall $\sigma_x = 1$ und $\sigma_y = \sigma$.

Frage: Können Sie bereits vor Durchführung einer nennenswerten Rechnung begründet sagen, um welchen Kegelschnitt es sich handelt?

- (a) Bestimmen Sie, um welchen Kegelschnitt es sich handelt und geben Sie
 (b) die Parameter des Kegelschnitts und (c) die Lage seiner Hauptachse(n)
 an.

Aufgaben zu Abschnitt 3.6 Hüllkurven und Krümmung

A 54. Die Parabel

$$y^2 = 2px$$

ist bekanntlich die Hüllkurve ihrer Tangenten

$$y(x, t) = \pm \left(\frac{p}{2t} + tx \right), \quad t \in (0, \infty).$$

Vollziehen Sie die in der VL präsentierten allgemeinen Überlegungen zur Konstruktion einer Hüllkurve anhand dieses Beispiels Schritt für Schritt nach.

A 55. *Albrecht Dürer* zeichnete im Jahre 1525 die Hüllkurve der Geraden-schar

$$y(x, a) = (13 - a)\left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Die nachstehende Graphik ist [23], Section II.3 "Envelopes and Curvature" entnommen.

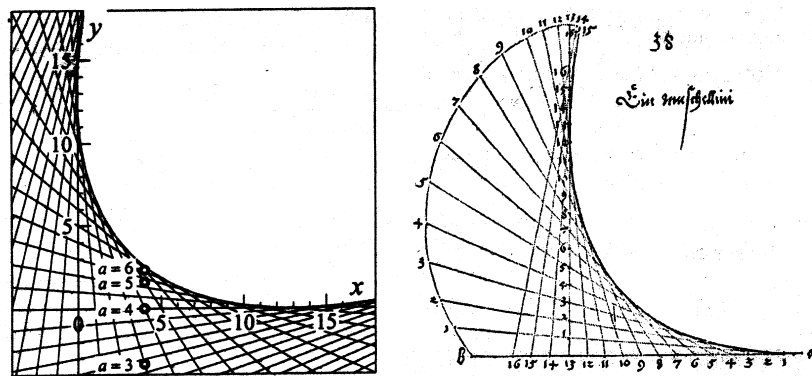


FIGURE 3.1. Family of straight lines forming a parabola and a sketch by Dürer (1525)¹

- Konstruieren Sie diese Hüllkurve (a) mittels GeoGebra und (b) analytisch.
 (c) Geben Sie die Symmetrieachse der Hüllkurve an und (d) führen Sie schließlich eine Hauptachsentransformation durch.

A 56. Eine Ellipse kann bekanntlich folgendermaßen konstruiert werden: Die Enden eines Stabes der Länge a (o.B.d.A. $a = 1$), welcher an einer festen Stelle mit einem Zeichenstift versehen ist, gleiten im Achsenkreuz der x - y -Ebene ⁴. Dann zeichnet der Stift eine Ellipse (oder einen Kreis; Letzteres dann, wenn der Zeichenstift genau in der Mitte des Stabes angebracht ist). Der Stab erzeugt dabei eine Hüllkurve. Weisen Sie nach, dass die Gleichung dieser Hüllkurve

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

ist ⁵. **Hinweis:** Aus Symmetriegründen reicht es, die Hüllkurve im ersten Quadranten zu studieren. Es ist zweckmäßig, die Geradenschar dabei (etwa) folgendermaßen zu beschreiben:

$$x(\varphi) \equiv 0, \quad y(\varphi) = \sin \varphi, \quad \lambda(\varphi) = -\tan \varphi, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

A 57. (a) Zeigen Sie, dass die Hüllkurve der Geradenschar

$$g_s(x) = s + x - 2sx, \quad s \in [0, 1]$$

die Funktion

$$\min\{g_s(x) : s \in [0, 1]\} = \min\{g_0(x), g_1(x)\} = \min(x, 1 - x)$$

ist und (b) veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt mit Hilfe von GeoGebra.

(c) Begründen Sie, warum für dieses Beispiel die in der Vorlesung präsentierte Vorgehensweise zur Bestimmung von Hüllkurven versagt.

A 58. Beweisen Sie 3.6.2, Anmerkung 4 auf folgende Weise: (a) Berechnen Sie die Entfernung d auf elementargeometrischem Weg und (b) überzeugen Sie sich durch Vergleich mit der Formel für ρ von der Richtigkeit der Aussage.

A 59. Gegeben sei eine Ellipse, deren Längen der großen und kleinen Halbachse a bzw. $b < a$ sind. $\rho = \frac{b^2}{a}$ und $R = \frac{a^2}{b}$ seien die Radien der Krümmungskreise in den Haupt- bzw. Nebenseiteln.

⁴Siehe Abb. 6.20, S. 229 in [28]

⁵Diese Kurve heißt *Astroide* oder *Sternkurve*.

(a) Zeigen Sie, dass eine goldene Ellipse (vgl. Anmerkung 5 in Abschnitt 3.4.3 und Aufgabe 47) durch eine der folgenden drei gleichwertigen Eigenschaften charakterisiert ist:

- (i) $a = \rho + b$
- (ii) $a = R - b$
- (iii) $a = \frac{R+\rho}{2}$.

(b) Konstruieren Sie eine goldene Ellipse und illustrieren Sie die Eigenschaften (i) und (ii) mittels GeoGebra.

A 60. In der Vorlesung wurden die Radien der Krümmungskreise für jeden Punkt (x_0, y_0) einer Ellipse ermittelt. Gehen Sie analog vor, um die Radien der Krümmungskreise für jeden Punkt der Hyperbel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

zu ermitteln.

A 61. Gegeben sei eine Ellipse in erster Hauptlage, deren Längen von Haupt- und Nebenachse $2a > 2b > 0$ sind. Diese Ellipse wird in Richtung der x -Achse um a nach rechts verschoben.

- (a) Stellen Sie gemäß 3.6.2, Anmerkung 6 die Formel für die Radien der Krümmungskreise für die verschobene Ellipse dar.
- (b) Drücken Sie diese Formel mit Hilfe der numerischen Exzentrizität $\varepsilon \in (0, 1)$ und des Focalparameters $p > 0$ aus.
- (c) Führen Sie schließlich für festes p den Grenzübergang für $\varepsilon \nearrow 1$ durch.

A 62. Versuchen Sie, die in Abschnitt 3.4 von [32] wiedergegebenen Überlegungen *Isaak Newtons* aus dem Jahre 1671 nachzuvollziehen, um die Krümmung jeglicher Kurve in einem gegebenen Punkt aufzufinden.

A 63. Verifizieren Sie die in Abschnitt 3.6.3, Anmerkung 1 angegebene analytische Darstellung der Traktrix.

A 64. Die Funktion $y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ beschreibt bekanntlich die Kettenlinie mit dem Parameter $a > 0$.

- (a) Berechnen Sie den Krümmungsradius der Kettenlinie im Punkt $(x, y(x))$.

(b) Weisen Sie nach, dass die Evolute der Kettenlinie mit dem Parameter $a = 1$ die Gestalt

$$x(y) = \mp \left(\frac{y}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1} - \ln\left(\frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}\right) \right)$$

besitzt.

Aufgaben zu Abschnitt 4.2 Hyperbolische Geometrie: Poincarés Kreismodell

A 65. (zu 4.2.1, Anmerkung 1, (iii)): Zeigen Sie, dass d die Dreiecksungleichung erfüllt.

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Metrik ist die folgende: je näher am Rand des Intervalls $[-1, 1]$ sich zwei Punkte x und y befinden, umso kleiner ist gewissermaßen die Einheit, mit der ihr Abstand gemessen wird:

Sei $I(x) = [x - 0.05, x + 0.05]$ das Intervall der Länge 0.1 mit Mittelpunkt $x \in [-0.95, 0.95]$. Dann ist

$$\delta(x) = d(x - 0.5, x + 0.05) = \left| \log \frac{(1 + (x - 0.05)) \cdot (1 - (x + 0.05))}{(1 - (x - 0.05)) \cdot (1 + (x + 0.05))} \right|$$

die Länge des Intervalls $I(x)$ im Sinn der Metrik d . Eine Darstellung der Funktion δ findet man in Abbildung 2.

A 66. Verifizieren Sie 4.2.1, Anmerkung 2.

A 67. (a) Zeigen Sie, dass die in 4.2.2, Behauptung 2 beschriebene (doppelte) Fläche die rechte Seite der Beziehung

$$x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \forall x \in [1, \infty]$$

ist und (b) verifizieren Sie diese.

Zusatzaufgaben

Z 1. Für die in Abschnitt 3.1 angegebenen Lösungen z_1 und z_2 der quadratischen Gleichung $z^2 - az - b^2 = 0$ gelten die beiden Beziehungen

$$(a) \quad z_1 - (-z_2) = a \quad \text{und} \quad (b) \quad z_1 \cdot (-z_2) = b^2.$$

Geben Sie für beide eine geometrische Interpretation an.

Z 2. Ellipse und Hyperbel als Hüllkurve einer Geradenschar: Analog zu Abb. 6.45 "Parabel als Hüllkurve" in Abschnitt 3.6.1 können auch Ellipse und Hyperbel als Hüllkurve einer Geradenschar erhalten werden.

Gegeben seien ein Kreis \mathcal{K} o.B.d.A. mit Radius $= 1$, eine Gerade a durch dessen Mittelpunkt M und eine Punkt $F \in a$, (i) innerhalb bzw. (ii) außerhalb von \mathcal{K} . Weiters sei A ein beliebiger Punkt auf \mathcal{K} . Nun ziehen man die Verbindungsstrecke FA und errichte normal zu dieser eine Gerade g_A durch den Punkt A .

Dann ist die Hüllkurve der Geradenschar g_A , $A \in \mathcal{K}$ im Fall (i) eine Ellipse und im Fall (ii) eine Hyperbel. (Mittelpunkt und Hauptachse der Ellipse bzw. der Hyperbel sind M bzw. a , F ist einer der beiden Brennpunkte und $\mathcal{K} \cap a$ sind die beiden Hauptscheitel.)

(a) Ermitteln Sie die beiden Hüllkurve mit Hilfe von GeoGebra, (b) weisen Sie durch geometrische Argumentation nach, dass die Hüllkurve im Fall (i) tatsächlich eine Ellipse und im Fall (ii) tatsächlich eine Hyperbel ist und (c) ermitteln Sie die beiden Hüllkurven schließlich auf analytischem Weg.

(Man vergleiche dazu auch Aufgabe 31.)

Z 3. Newton's Organic Construction of Curves: *Isaac Newton* (1643 - 1727) hat in Lemma XXI, Book I, Section V seines Werkes *Principia Mathematica* (1687) folgende interessante Vorgangsweise zur Konstruktion von Kegelschnitten beschrieben:

Gegeben seien eine Ebene \mathcal{E} , zwei feste Punkte $B, C \in \mathcal{E}$ und zwei zugehörige fest vorgebene Winkel β und γ und weiters ein Gerade $g \subseteq \mathcal{E}$ und ein beliebiger Punkt $M \in g$. Nun ziehe man die beiden Strecken MB und MC und errichte die Geraden g_B durch B und g_C durch C , derart, dass

- g_B mit der Strecke MB den Winkel β und
- g_C mit der Strecke MC den Winkel γ einschließt.

Dann beschreibt der Schnittpunkt $D = g_B \cap g_C$, wenn der Punkt M die Gerade g durchläuft, einen Kegelschnitt, welcher die beiden vorgegebenen Punkte B und C enthält.

(a) Verwenden Sie je einen Schieberegler für die Winkel $\beta, \gamma \in [0, 2\pi)$, um diese Aussage mit Hilfe von GeoGebra zu illustrieren.

(b) In der im Internet unter

www.17centurymaths.com/contents/newton/book1s5.pdf

verfügbaren Übersetzung der *Principia Mathematica* von Ian Bruce findet man Newton's geometrischen einschlägigen Beweis der Lemmata XXI und XX (Page 160-162). Sehen Sie sich diese Beweise an.

(c) Führen Sie selbst einen analytischen Beweis durch.

Hinweis: Seien $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und o.B.d.A. $M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$. Multipliziert man den Vektor $B - M$ mit der Matrix

$$\mathbb{Q}_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) & \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) & \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix},$$

so erhält man den Normalvektor des Vektors $D - B$, derart dass g_B und MB den Winkel β einschließen. Demgemäß ist die Gleichung Geraden g_B

$$(D - B)' \cdot \mathbb{Q}_\beta (B - M) = 0.$$

Die Gleichung für g_C ist demgemäß

$$(D - C)' \cdot \mathbb{Q}_\gamma (C - M) = 0.$$

Bestimmt man aus einer der beiden Gleichungen den Parameter m , setzt diesen in die andere ein und multipliziert mit dessem Nenner, so erhält man eine Quadrik. Dass $D = B$ und $D = C$ unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen die beiden Gleichungen erfüllen, prüft man leicht nach.

Z 4. Behauptung: Seien

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (ax + by) + c = 0$$

eine Quadrik und

$$\mathbf{x}' = \mathbb{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

eine affine Abbildung, d.h. \mathbb{Q} ist eine invertierbare 2×2 -Matrix und \mathbf{b} ist ein 2-Vektor.

Dann ist das Bild einer Ellipse eine Ellipse, das Bild einer Parabel eine Parabel und das Bild einer Hyperbel eine Hyperbel.

Beim Beweis geht man folgendermaßen vor: Sei

$$\mathbb{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

die inverse Matrix von \mathbb{Q} und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{Q}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

Dann gilt für die Diskriminante des durch die Abbildung gegebenen Kegelschnitts

$$D' = (ps - rq)^2 \cdot (AC - (B/2)^2) .$$

Zeigen Sie Letzteres (vgl. Abschnitt 3.5.3, Anmerkung 2).

Z 5. Seien r_0 der Radius der Erde und $\Delta > 0$, sehr klein im Vergleich mit dem Erdradius. Ein Raumschiff starte mit der Geschwindigkeit v_1 von einer Höhe $r_1 \in [r_0, r_0 + \Delta]$ (bezogen auf den Erdmittelpunkt) und zwar in einem Winkel $\alpha_1 \in [0, \pi]$ mit der Waagrechten. g_1 sei die Erdbeschleunigung am Ort des Starts. Die Geschwindigkeit v_1 sei kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit, d.h. es gelte

$$v_1 \in (0, \sqrt{2g_1 r_1}) .$$

Weiters sei

$$x = \frac{v_1^2}{g_1 r_1} \quad (\in (0, 2)) .$$

Der deutsche Raumfahrtpionier *Hermann Oberth* (1894 – 1969) berechnet in seinem Buch [16] die Bahnellipse des Raumschiffs und gibt diese wie folgt an: Ihre Hauptachse liegt auf einer Geraden durch den Erdmittelpunkt, welcher einer der beiden Brennpunkte der Ellipse ist (siehe nachstehende Abbildung). Ihre Scheitelpunkte sind durch die beiden Radien

$$r_{\max, \min} = \frac{r_1}{2 - x} (1 \pm \sqrt{1 - (2 - x)x \cdot \cos^2 \alpha_1}) \quad (*)$$

gegeben, welche im Sinne der üblichen Darstellung

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

in Polarkoordinaten für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu verstehen sind.

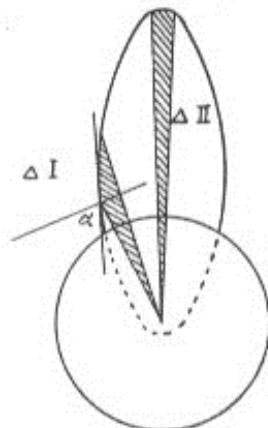


Abb. 61.

Ermitteln Sie aus (*) (a) die Länge a der großen Halbachse und (b) die numerische Exzentrizität ε der Ellipse.

Geben Sie für den Fall, dass das Raumschiff waagrecht startet ($\alpha_1 \in \{0, \pi\}$), (c) ε , r_{\max} und r_{\min} an und unterscheiden Sie dabei die Fälle (i) $x \in [1, 2)$ und (ii) $x \in (0, 1)$.

(d) Folgern Sie daraus, dass das Raumschiff

- im Fall (i) die Erde umrundet und
- im Fall (ii) zur Erde abstürzen würde.

Anmerkung zu (b): Bedenken Sie, dass die Ellipse im Fall eines senkrechten Starts ($\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$) zu einer Strecke degeneriert ($a > 0$, $b = 0$ und somit $\varepsilon = 1$).

Z 6 (Freier Fall mit Luftwiderstand). Seien

g ... die Erdbeschleunigung und

v_∞ ... die Grenzgeschwindigkeit.

Dann legt ein Fallschirmspringer in der Zeit t die Fallhöhe

$$s(t) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \ln(\cosh(\frac{gt}{v_\infty})) , \quad t \geq 0$$

zurück.

Zeigen Sie, (a) dass die Geschwindigkeit somit

$$v(t) = s'(t) = v_\infty \cdot \tanh(\frac{gt}{v_\infty})$$

ist und (b) dass $s(t)$ die Differentialgleichung

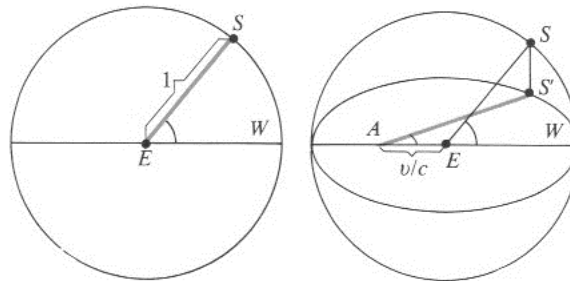
$$m \cdot s''(t) = m \cdot g - k \cdot v^2(t)$$

erfüllt, wobei m die Masse des Fallschirmspringers und $k = \frac{g \cdot m}{v_\infty^2}$ ist.

(c) Stellen Sie die Funktion $v(t)$ (für $g \simeq 10 \text{ m/sec}^2$, $v_\infty \simeq 5 \text{ m/sec}$) graphisch dar und interpretieren Sie das Ergebnis.

Z 7. *J. Schwinger* schreibt im Exkurs 3.4 "Relativistische Aberration" seines Buches [18] "Einsteins Erbe - Die Einheit von Raum und Zeit"

"Die Linie, die vom Mittelpunkt E des Kreises zum Punkt S führt, soll die Richtung darstellen, in der ein Stern von Erde aus beobachtet wird. Die horizontale Strecke, auf der sich der Stern Wega⁶ (W) befindet, gibt die Richtung der Relativbewegung an. Nun wird eine Ellipse einbeschrieben, deren Hauptachse in Richtung der horizontalen Strecke (EW) weist und deren Brennpunkt (A) sich in der Entfernung v/c vom Mittelpunkt befindet. Die von S senkrecht nach unten gezogene Gerade trifft die Ellipse im Punkt S' . Die Verbindungslinie vom Brennpunkt A nach S' gibt dann die Richtung an, in der dieser Stern von den Argonauten beobachtet wird, die mit der Geschwindigkeit v zur Wega hinfliegen."



Gegeben sei eine Ellipse \mathcal{E} , deren Länge der halben Hauptachse $a = 1$ und deren numerische Exzentrizität $\varepsilon \in (0, 1)$ sind. Ihre Brennpunkte seien $F_1 = (-\varepsilon, 0)$ und $F_2 = (\varepsilon, 0)$. Weiters seien $P = (x, y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ ein Punkt von \mathcal{E} ,

$$r = |P - F_1|$$

die Länge der Strecke F_1P und $P_0 = (x, 0)$ der Fußpunkt von P und somit $|P_0 - F_1| = \varepsilon + x$.

⁶im Sternbild Leier

Zeigen Sie

$$(a) \quad r = a + x \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad (b) \quad \sqrt{r^2 - (\varepsilon + x)^2} = y .$$

Z 8. Zum "Nachtrag zum Parallelenaxiom" in Abschnitt 4.1

Zeigen Sie (exemplarisch), dass die Postulate 3 und 7 äquivalent sind.

Hinweis: Die Implikation "Postulat 7 \Rightarrow Postulat 3" zeigt man zweckmäßigerweise (i) zunächst für ein rechthekliges Dreieck und (ii) dann für ein allgemeines Dreieck.

Z 9. Gegeben sei die Parabel $y^2 = 2p(x + p/2)$ mit Brennpunkt $F = (0, 0)$, Scheitelpunkt $S = (-p/2, 0)$ und Leitlinie $l = -p$. Weiters sei $P = (x, y)$ ein Punkt der Parabel in der oberen Halbebene und φ der Winkel SFP .

(a) Sei

$$r_p(\beta) = \frac{p}{1 + \cos \beta}, \quad \beta \in [0, \pi] .$$

Zeigen Sie, dass der Punkt $P = (x, y)$ der Parabel folgende Darstellung besitzt

$$x = x(\varphi) = -r_p(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y = y(\varphi) = r_p(\varphi) \cdot \sin \varphi .$$

(b) Weisen Sie nach, dass die Fläche, welcher der Radiusvektor $r_p(\beta)$, $\beta \in [0, \varphi]$ vom Scheitelpunkt S bis zum Punkt P überstreicht, gleich

$$F_p(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r_p^2(\beta) d\beta = \frac{p^2}{6} \cdot \sin \varphi \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} + \frac{1}{(1 + \cos \varphi)^2} \right)$$

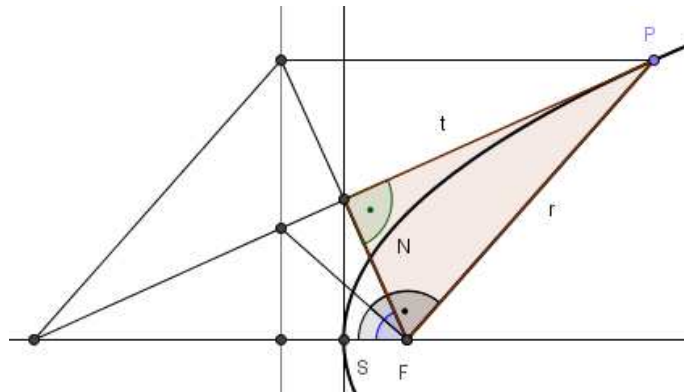
ist.

(c) Sei $P \in \mathcal{P}$, t die Tangente an \mathcal{P} im Punkt P und N_p der Normalabstand der Tangente t vom Brennpunkt F . Überzeugen Sie anhand der nachstehenden Abbildung davon, dass der zum Polarwinkel φ gehörige Normalwinkel

$$\alpha(\varphi) = \frac{\varphi}{2}$$

ist und dass für den Normalabstand somit gilt

$$N_p(\alpha(\varphi)) = \frac{p}{2 \cos(\frac{\varphi}{2})} .$$



Anmerkung 1: Im Hinblick auf die Identität

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

gilt

$$F_p(\varphi) = \frac{p^2}{12} \cdot \sin(\varphi) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(\frac{\varphi}{2})} + \frac{1}{2 \cos^4(\frac{\varphi}{2})} \right).$$

(d) Weisen Sie nach, dass der Flächeninhalt des markierten Dreiecks in der obigen Abbildung

$$\tilde{F}_p(\varphi) = \frac{p^2}{8} \cdot \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\cos^3(\frac{\varphi}{2})}$$

ist.

Anmerkung 2: Der Quotient

$$q(\varphi) = \frac{F_p(\varphi)}{\tilde{F}_p(\varphi)}, \quad \varphi \in (0, \pi)$$

ist streng monoton fallend und besitzt zudem die Eigenschaften

$$\frac{1}{2}(q(\varphi) + q(\pi - \varphi)) = q\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi \searrow 0} q(\varphi) = 2.$$

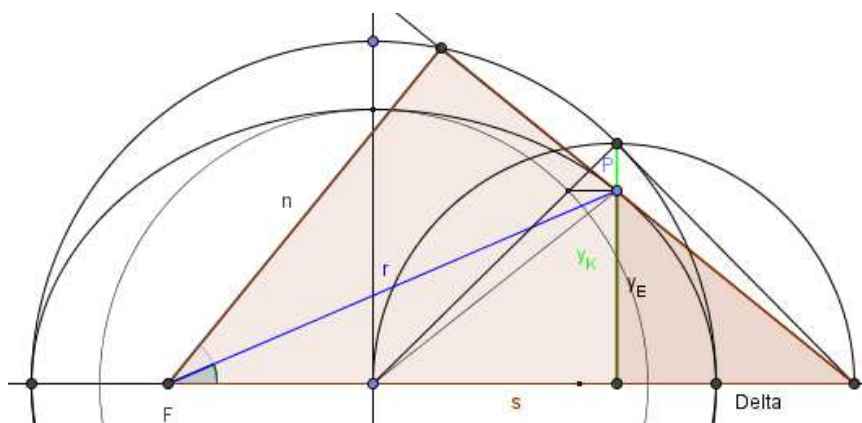
Z 10. Beweisen Sie die Proposition 2 im Anhang 5.2 Kosmische Geschwindigkeiten und Keplers Radiengesetz.

Hinweis: Gehen Sie von der nachstehenden Abbildung aus. Für die Berechnung des Normalabstands $n(\varphi)$ ist es zweckmäßig, (i) den Höhensatz

$$y_K^2(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi - a\varepsilon) \cdot \Delta(\varphi)$$

und (ii) die Ähnlichkeit der beiden markierten Dreiecke zu nutzen, wonach gilt

$$\frac{n(\varphi)}{s(\varphi)} = \frac{\Delta(\varphi)}{\sqrt{y_E^2(\varphi) + \Delta^2(\varphi)}}.$$



Z 11. Gegeben sei eine Ellipse \mathcal{E} mit kleiner Halbachse b . $n_1(\varphi)$ und $n_2(\varphi)$ seien die Normalabstände der Tangente in einem beliebigen Punkt $P(\varphi) \in \mathcal{E}$ zu den Brennpunkten F_1 bzw. F_2 der Ellipse. Dann gilt der Sachverhalt

$$n_1(\varphi) \cdot n_2(\varphi) = b^2 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi).$$

(a) Visualisieren Sie diesen Sachverhalt mit Hilfe von GeoGebra. (b) Zeigen Sie ihn ausgehend von der Aussage (b) in Aufgabe A 27.

Anmerkung: Der entsprechende Sachverhalt gilt auch für jede Hyperbel.

Bibliography

- [1] **Bücher**
- [2] *Heath, Th.L.*: A history of Greek mathematics, Vol. 2. Oxford 1921
- [3] *Klein, F.*: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie. Springer Verlag, Berlin 1928
- [4] *Ley, W.* (Hsg.): Die Möglichkeit der Weltraumfahrt - Allgemeinverständliche Beiträge zum Raumschiffahrtsproblem. Verlag von Hachmeister & Thal, Leipzig 1928
- [5] *Wunderlich, W.*: Darstellende Geometrie I. B-I-Hochschultaschenbücher 96/96a, Mannheim 1966
- [6] *Goodstein, D.L.* and *Goodstein, J.R.*: Feynman's Lost Lecture - The Motion of Planets Around the Sun. Jonathan Cape, Random House, London 1966
- [7] *Czwalina, A.* (Übersetzer): *Apollonios*: Die Kegelschnitte. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1967
- [8] *Klein, F.*: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: 2 Geometrie. Springer Verlag, Berlin 1968
- [9] *Fishback, W.T.*: Projective and Euclidian Geometry. John Wiley & Sons, New York - London - Sydney - Toronto 1969
- [10] *René Descartes*: Geometrie (1637). Ludwig Schlesinger (Übersetzer). Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1969
- [11] *Friedell, E.*: Kulturgeschichte der Neuzeit. Verlag C.H. Beck, München 1974

- [12] *Ogilvy, C.S.*: Unterhaltsame Geometrie. Vieweg Verlag, Braunschweig 1976
- [13] *Mehrtens, H.* und *St. Richter* (Hsg.): Naturwissenschaft, Technik und NS-Ideologie - Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte des Dritten Reiches. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1980
- [14] *Coxeter, H.S.M.* und *S.L. Greitzer*: Zeitlose Geometrie. Klett Verlag, Stuttgart 1983
- [15] *Poliakov, L.* und *J. Wulf*: Das Dritte Reich und seine Denker. Ullstein Verlag, Frankfurt/M - Berlin - Wien 1983
- [16] *Oberth, H.*: Wege zur Raumschiffahrt. Klassiker der Technik, VDI Verlag, Düsseldorf 1986, Reprint der Ausgabe von 1926
- [17] *Schreiber, P.*: Euklid. Teubner, Leipzig 1987
- [18] *Schwinger A.*: Einsteins Erbe - Die Einheit von Raum und Zeit. Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg 1988
- [19] *Wheeler, J.A.*: Gravitation und Raumzeit - Die vierdimensionale Ereigniswelt der Relativitätstheorie. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin - New York 1989
- [20] *Hilbert, D.* und *St. Cohn-Vossen*: Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1991
- [21] *Gericke, H.*: Mathematik in Antike und Orient. Fourier Verlag, Wiesbaden 1992
- [22] *Galilei, G.*: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Band 11, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1995
- [23] *Hairer, E.* and *G. Wanner*: Analysis by Its History. Springer, New York 1996
- [24] *Hoskin, M.* (Edt.): The Cambridge Illustrated History of Astronomy. Cambridge University Press, Cambridge 1997

- [25] *Edgerton, S.Y.*: Die Entdeckung der Perspektive. Wilhelm Fink Verlag, München 2002
- [26] *Archimedes*: Abhandlungen von Archimedes. Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Band 201, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 2003
- [27] *Gleick, J.*: Isaak Newton. Harper Perennial, London 2003
- [28] *Glaeser, G.*: Der mathematische Werkzeugkasten - Anwendungen in Natur und Technik. Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, München 2004
- [29] *Nahin, P.J.*: When Least is Best - How mathematicians discovered many clever ways to make things as small (or as large) as possible. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 2004
- [30] *Euklid*: Die Elemente. Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Band 235, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2005
- [31] *Scriba, Ch.J.* und *P. Schreiber*: 5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer Verlag, Berlin 2005
- [32] *Axler, S.* and *K.A. Ribet* (Edts.): Mathematical Masterpieces - Further Chronicles by the Explorers. Springer Science+Business Media, New York 2007
- [33] *O'Shea, D.*: Poincarés Vermutung - Die Geschichte eines mathematischen Abenteuers. S. Fischer Verlag, Frankfurt am Main 2007
- [34] *Damisch, H.*: Der Ursprung der Perspektive. Diaphanes Verlag, Zürich 2010
- [35] *Sonar, Th.*: 3000 Jahre Analysis - Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer, Heidelberg - New York - Dordrecht - London 2011
- [36] *Berggren, J.L.*: Mathematik im mittelalterlichen Islam. Springer, Berlin - Heidelberg 2011
- [37] *Ostermann, A.* and *G. Wanner*: Geometry by Its History. Springer, Heidelberg - New York - Dordrecht - London 2012

Skripten

- [38] *Thaler, M.*: Unterlagen zur Lehrveranstaltung Analysis III, Salzburg WS 2006/07
- [39] *Linhart, J.*: Geometrie. Skriptum zur einschlägigen Vorlesung, Salzburg 2008

Dipomarbeiten

- [40] *Golser, B.*: Himmelsmechanik - Die Mechanik bewegter Körper, Salzburg 2003
- [41] *Oberrauner, S.*: Licht und Schatten als zentrale Elemente in der Geschichte der Astronomie, Salzburg 2008
- [42] *Reichenberger, S.*: Mittelwerte der Pythagoreer und babylonische Wurzelapproximation, Salzburg 2007
- [43] *Rechberger, V.*: Hüllkurven und Krümmung, Salzburg 2012

Fachbereichsarbeit

- [44] *Österreicher, L.*: Berechnung der Planetenpositionen in verschiedenen Koordinatensystemen unter Verwendung des Computers. Fachbereichsarbeit, BORG Nonntal, Salzburg 1997

Artikel

- [45] *Boyer, C.B.*: The Invention of Analytic Geometry (1949). In: Mathematics - An Introduction to Its Spirit and Use. Scientific American, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1978
- [46] *Gardner, M.*: Diversions that Involve One of the Classic Cone Sections: The Ellipse (1961). In: Mathematics - An Introduction to Its Spirit and Use. Scientific American, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1978
- [47] *Kline, M.*: Projective Geometry (1955). Scientific American, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1978

- [48] *Fellmann, E.A.*: Leonhard Euler - Ein Essay über Leben und Werk. In: *Burckhardt, J.J.*: Leonhard Euler - Beiträge über Leben und Werk. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Stuttgart 1983
- [49] *Bellone, E.* (Edt.): Galilei: Leben und Werk eines unruhigen Geistes. Spektrum der Wissenschaften-Biographien 1/1998
- [50] *Lombardi, A.M.* (Edt.): Johannes Kepler: Einsichten in die Himmlische Harmonie. Spektrum der Wissenschaften-Biographien 4/2000
- [51] *Nemeczek, A.*: Alles nur eine Frage der Perspektive. Toskana, Merian 05/53 (Mai 2000)
- [52] *Le Goff, J-P.*: Von der Perspektive zur geometrischen Unendlichkeit. In: "Das Unendliche", Spektrum der Wissenschaften-Spezial 1/2001
- [53] *Lojacono, E.*: René Descartes: Von der Metaphysik zur Deutung der Welt. Spektrum der Wissenschaften-Biografie 3/2001
- [54] *Folkerts, M.*: Geometrie - Gelehrte Kreise von Sizilien bis Oxford. In: Forschung und Technik im Mittelalter, Spektrum der Wissenschaften-Spezial 2/2002
- [55] *Bianchi, L.*: Physik der Bewegung - Der Pfeil des Aristoteles. In: Forschung und Technik im Mittelalter, Spektrum der Wissenschaften-Spezial 2/2002
- [56] *Saliba, G.*: Der schwierige Weg von Ptolemäus zu Kopernikus. Spektrum der Wissenschaften-Dossier 4/2006
- [57] *Strohmaier, G.*: Alhazen - Physik am Rande des Irrsinns. In: Astronomie vor Galilei. Spektrum der Wissenschaften-Spezial 4/2006
- [58] *Költzsch, P.*: Von der Antike bis in das 20. Jahrhundert - Ein Steifzug durch die Welt der großen Akustiker. Festvortrag DGZfP- Jahrestagung 2007

Schulbuch

- [59] *Sexl·Kühnelt·Pflug·Stadler*: Physik 1. Verlag Holder-Pichler-Tempsky, Wien 1988