

Abstract

New results on Diophantine problems related to linear recurrences

Sebastian Heintze

Defensio am 14.05.2021

Deutsche Version:

In dieser Dissertation betrachten wir verschiedene Diophantische Probleme, wobei die meisten davon einen Bezug zu linearen Rekurrenzen besitzen. Manche Probleme werden über Zahlkörpern und andere über Funktionenkörpern in einer Variable über den komplexen Zahlen betrachtet. Die Gemeinsamkeiten der einzelnen Probleme liegen zum einen in der Kombination von Diophantischen Gleichungen mit Rekurrenzen und zum anderen in der Methodik, die auf höherdimensionaler Diophantischer Approximation beruht. Wir betrachten zwei verschiedene Varianten Diophantischer Tupel, zum einen eine S-Einheiten Variante im Zahlkörperfall und zum anderen eine Variante mit Polynomen im Funktionenkörperfall. Zudem untersuchen wir das Wachstum von linearen Rekurrenzen sowie das Vorkommen von perfekten Potenzen in ebensolchen im Funktionenkörperfall. Des Weiteren betrachten wir Norm-Form-Gleichungen mit Lösungen in einer gegebenen Multi-Rekurrenz ebenso wie polynomiale Gleichungen, deren Koeffizienten durch linear rekursive Folgen parametrisiert sind, im Zahlkörperfall. Darüber hinaus werden noch Diophantische Gleichungen in getrennten Variablen und eine Funktionenkörper-Variante von Pillai's Problem betrachtet. Um diese Probleme zu behandeln, verwenden wir unter anderem Bewertungen, Höhen, verallgemeinerte Einheitengleichungen und verschiedene Versionen des Teilraumsatzes inklusive eines Funktionenkörper-Analogons.

English version:

In this dissertation we will consider different Diophantine problems, where most of them are related to linear recurrence sequences. Some of those problems will be considered over number fields and the other ones over function fields in one variable over the field of complex numbers. They have in common that they combine Diophantine equations with linear recurrence sequences and that they use methods based on higher-dimensional Diophantine approximation. We will consider two different variants of the Diophantine tuple problem, where one of them will be an S-unit variant over number fields and the other one a polynomial variant in the function field case. Moreover, we will investigate the growth of linear recurrence sequences in function fields and the existence of perfect powers in such sequences of polynomials. Furthermore, we will consider norm form equations with solutions taking values in a given multi-recurrence as well as polynomial equations with coefficients parametrized by linear recurrence sequences in the number field case. Finally, we will work with Diophantine equations in separated variables and give a function field variant of Pillai's problem. All these topics are handled by using valuations, heights, generalized unit equations, and different versions of the subspace theorem, including a function field analogue, among others.