Kurzfassung

Diese Dissertation besteht im Wesentlichen aus sieben Publikationen, in welchen jeweils diophantische Probleme gelöst werden, die mit S-Einheitengleichungen zusammenhängen. In der Einleitung wird anhand eines einfachen Beispiels ein Überblick über die bestehenden Methoden zur Lösung von S-Einheitengleichungen gegeben. Außerdem wird erklärt, wie die Probleme in den Publikationen mit S-Einheitengleichungen zusammenhängen. In den ersten zwei Publikationen wird ein Ergebnis von Pillai verallgemeinert: Pillai fand für fixe ganze Zahlen a, b eine asymptotische Formel für die Anzahl an Zahlen, die sich darstellen lassen als $c = a^n - b^m$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$. In Publikation I ersetzen wir a^n und b^m durch lineare Rekurrenzen und in Publikation II betrachten wir reelle Zahlen a und b. In Publikation III wird ein weiteres Ergebnis von Pillai verallgemeinert: wir beweisen, dass die Gleichung $U_n - b^m = c$ „normalerweise" höchstens zwei Lösungen (n, m) besitzt, wobei (U_n) eine fixe lineare Rekurrenz ist. Publikation IV beschäftigt sich mit der Frage, ob es aufeinanderfolgende multiplikativ abhängige Tupel ganzer Zahlen gibt, also ob Tupel der Form $(a_1, \dots, a_n)$ und $(a_1+1, \dots, a_n+1)$ beide multiplikativ abhängig sein können. In Publikation V wird eine Familie von Einheitengleichungen der Form $u_1 + u_2 = n$ über den Simplest Cubic Fields gelöst. In den Publikationen VI und VII werden die Familien von Thue-Gleichungen $(X - F_nY)(X - L_nY)X - Y^3 = \pm 1$ und $(X - F_nY)(X - 2^nY)X - Y^3 = \pm 1$ vollständig gelöst, wobei (F_n) die Fibonacci-Zahlen und (L_n) die Lucas-Zahlen sind.

Abstract

This thesis mainly consists of seven publications, in which Diophantine problems related to S-unit equations are solved. In the introduction we consider an easy equation and use it to give an overview of existing methods for solving S-unit equations. Moreover, we explain how the problems in the publications relate to S-unit equations. In the first two publications we generalise a result of Pillai: For fixed integers a and b, Pillai found an asymptotic formula for the number of integers that can be represened as $c = a^n - b^m$ with $n, m \in \mathbb{Z}$. In Publication I we replace a^n and b^m by linear recurrence sequences and in Publication II we consider real numbers a and b. In Publication III we generalise another result of Pillai: we prove that the equation $U_n - b^m = c$ "usually" has at most two solutions, where (U_n) is a fixed linear recurrence sequence. Publication IV is concerned with the question whether consecutive multiplicatively dependent integer tuples exist, i.e. if tuples of the form $(a_1, \dots, a_n)$ and $(a_1+1, \dots, a_n+1)$ can both be multiplicatively dependent. In Publication V we solve a family of unit equations of the shape $u_1 + u_2 = n$ over the simplest cubic fields. In Publications VI and VII we completely solve the two families of Thue equations $(X - F_nY)(X - L_nY)X - Y^3 = \pm 1$ and $(X - F_nY)(X - 2^nY)X - Y^3 = \pm 1$, where (F_n) are the Fibonacci numbers and (L_n) are the Lucas numbers.