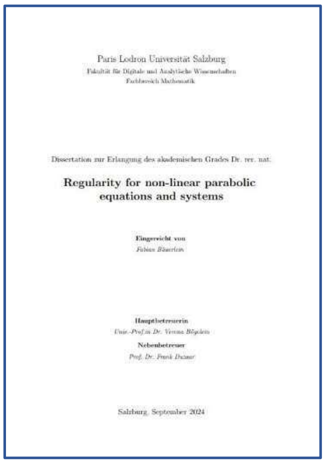
Regularity for non-linear parabolic equations and systems

Fabian Bäuerlein

Defensio am 19. Dezember 2024



Paris Lodron Universität Salzburg
Fakultät für Digitale und Analytische Wissenschaften
Fachbereich Mathematik

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat.

Regularity for non-linear parabolic equations and systems

Eingereicht von
Fabian Bäuerlein

Hauptbetreuerin
Univ.-Prof.in Dr. Verena Bögelein
Nebenbetreuer
Prof. Dr. Frank Duzaar

Salzburg, September 2024

Die vorliegende Dissertation ist der Regularitätstheorie von parabolischen nicht-linearen partiellen Differenzialgleichungs-systemen zugehörig. In diesen Unterkomplex der Analysis werden gewisse Lösungen von solchen Systemen auf deren Eigenschaften wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit untersucht. Eingeleitet wird die kumulative Dissertation durch eine Motivation des betrachteten Lösungsbegriffs und einer Literaturübersicht zu den betrachteten partiellen Differenzialgleichungssystemen sowie ausgewählter Teilgebiete der Regularitäts-theorie.

Der Hauptteil ist in vier Publikationen untergliedert, deren Resultate nun kurz zusammengefasst werden.

In der ersten Publikation wird die lokale Lipschitz-Stetigkeit von schwachen Lösungen stark degenerierter parabolischer Differenzialgleichungssysteme bewiesen. Dazu wird mittels eines Iterationsschemas, genannt Moser-Iteration, qualitative Abschätzungen für den Gradienten der Lösung gezeigt.

Die zweite Publikation behandelt sogenannte doppelt nichtlineare Differenzial-gleichungen mit dem Ziel eine schwache Harnack Ungleichung für schwache super-Lösungen zu beweisen. Dies gelingt, wobei die „expansion of positivity“ für derartige Lösungen essenziell für den Beweis ist.

Die letzten beiden Publikationen beschäftigen sich mit dem Teilgebiet der partiellen Regularität. Darunter zu verstehen ist, dass Eigenschaften von Funktionen wie Stetigkeit oder stetige Differenzierbarkeit nicht mehr auf den gesamten Definitionsbereich nachweisbar sind, sondern nur auf einem offenen Teilgebiet. Zusätzlich ist das Komplement dieses Teilgebiets eine Nullmenge bezüglich dem Hausdorff- oder Lebesgue-Maß. Außerhalb des Gebiets, auf dem die Funktion partiell regulär ist, können Singularitäten auftreten, was der Fall für schwache Lösungen von parabolischen partiellen Differenzialgleichungs-systemen in Divergenzform ist, deren Vektorfeld keine Uhlenbeck-Struktur besitzt. Letzteres ist in der dritten sowie vierten Publikation der Fall, wobei sich die betrachteten Vektorfelder der beiden Publikation bezüglich ihrer Abhängigkeit von den Gebietsvariablen sowie der schwachen Lösung unterscheiden, nicht jedoch durch die Abhängigkeit des Gradienten der schwachen Lösung. In der dritten Publikation wird angenommen, dass die Abhängigkeit von Ort und Zeit sowie der schwachen Lösung Hölder-stetig ist. Dies hat zur Folge, dass die lokale partielle Hölder-Stetigkeit des Gradienten der schwachen Lösung bewiesen werden kann. In der vierten Publikation wird die Hölder-Stetigkeit zu einer VMO-Bedingung bezüglich Ortes und Zeit sowie einer stetigen Abhängigkeit von der schwachen Lösung abgeschwächt. Dies hat zur Folge, dass nur noch Aussagen über die Stetigkeit der schwachen Lösung und nicht mehr ihres Gradienten etabliert werden kann. Diese ist nämlich lokal partiell Hölder-stetig für jeden Exponenten zwischen Null und Eins. Für die Beweise beider Publikationen ist die Approximation mit kalorischen Funktionen essenziell.