

Fibonacci, k -Fibonacci, Cullen und mehr

Unterlagen für Lehrende

Dr. István Pink
22.04.2025

Grundsätzlich: Wir bestimmen die 2-adische Ordnung der k -Fibonacci-Zahlen $F_{k,n}$ und verwenden sie, um eine scharfe Schranke für n in der Gleichungen $F_{k,n} = m!$ und $F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1$ zu erhalten, die nur von k abhängt. Für ein gegebenes k wird daher die vollständige Lösung der Gleichungen $F_{k,n} = m!$ und $F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1$ möglich.

Technologieeinsatz mit Sage:

Link zu SageCell: <https://sagecell.sagemath.org/>

Einige nützliche Sage-Befehle: `fibonacci(n)`, `BinaryRecurrenceSequence(a,b,u0,u1)`, `ZZ.valuation(2)(n)`, `ZZ.valuation(p)(n)`, `factorial(n)`

Programm in Stichworten:

2-adische und p -adische Ordnung einer ganzen Zahl ($\nu_2(n), \nu_p(n)$), p -adische Ordnung der Faktorielle (Satz von Legendre), 2-adische Ordnung der Fibonacci Zahlen (Satz von Lengyel), Definition der k -Fibonacci Zahlen, Definition von k -Lucas Zahlen, Eigenschaften und Zusammenhänge, 2-adische Ordnung der k -Fibonacci und k -Lucas Zahlen (Satz von Kreutz, Lelis, Marques, Silva, Trojovsky), die Gleichungen $F_{k,n} = m!$ und $F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1$.

Wir starten mit der Frage: Welche ist die größte Potenz von 2, die 360 teilt? Es gilt $2 \mid 360, 4 = 2^2 \mid 360, 8 = 2^3 \mid 360$, aber $16 = 2^4 \nmid 360$. D. h., die größte Potenz von 2, die 360 teilt, ist 3. Diese Beobachtung führt zu folgender Definition: Sei $n \neq 0$ eine ganze Zahl und $\nu_2(n)$ die größte Potenz von 2, welche die Zahl n teilt. Dann heißt $\nu_2(n)$ die *2-adische Ordnung von n* . Ein paar weitere Beispiele: $\nu_2(50) = \nu_2(2^1 \cdot 5^2) = 1$. $\nu_2(87) = 0$. Für eine ungerade ganze Zahl m ist $\nu_2(m) = 0$. Das Konzept der 2-adischen Ordnung kann für eine beliebige Primzahl p verallgemeinert werden: Sei p eine Primzahl, $n \neq 0$ eine ganze Zahl und $\nu_p(n)$ die größte Potenz von p , welche die Zahl n teilt. Dann heißt $\nu_p(n)$ die *p -adische Ordnung von n* . Wieder ein paar Beispiele: $\nu_2(360) = \nu_2(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 3$. $\nu_3(360) = \nu_3(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2$. $\nu_5(360) = \nu_5(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 1$. Für alle Primzahlen $p \neq 2, 3, 5 \Rightarrow \nu_p(360) = \nu_p(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 0$.

Wir versuchen Eigenschaften zu finden: Bestimme $\nu_2(12 \cdot 10)$ und $\nu_2(12)$ sowie $\nu_2(10)$. Was fällt uns auf? $\nu_2(12 \cdot 10) = \nu_2(12) + \nu_2(10)$. Das kann verallgemeinert werden (siehe [Arbeitsauftrag 2](#)): $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \nu_p(a \cdot b) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$. Wie groß kann $\nu_2(n)$ für eine ganze Zahl $n > 0$ höchstens sein (siehe [Arbeitsauftrag 3](#))? Es gilt $\nu_2(n) \leq \log_2(n)$.

Wir bestimmen die p -adische Ordnung der Fakultät: Für eine ganze Zahl $n \geq 1$, ist die Fakultät (Faktorielle) von n als $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ definiert. Beispiele: Bestimme $\nu_2(9!) = \nu_2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) = \nu_2(1) + \nu_2(2) + \nu_2(3) + \nu_2(4) + \nu_2(5) + \nu_2(6) + \nu_2(7) + \nu_2(8) + \nu_2(9) = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$. Bestimme selbst $\nu_3(100!)$. Es gibt einen schönen Satz, der für eine beliebige Primzahl p und eine positive ganze Zahl n die p -adische Ordnung von $n!$ angibt (Satz von Legendre): Seien $n \geq 1$ eine ganze Zahl und p eine Primzahl. Dann gilt

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots,$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x ist. ($\lfloor x \rfloor$ heißt die Gaussklammer von x ; wir runden x auf die vorherige ganze Zahl ab.) Z.B: $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor 6.99 \rfloor = 6$, $\lfloor 0.78 \rfloor = 0$, $\lfloor 23 \rfloor = 23$. Weitere Beispiele: $\nu_3(100!) = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^6} \right\rfloor + \dots$
 $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = \lfloor 33.333... \rfloor = 33$, $\left\lfloor \frac{100}{3^2} \right\rfloor = \lfloor 11.111... \rfloor = 11$, $\left\lfloor \frac{100}{3^3} \right\rfloor = \lfloor 3.703... \rfloor = 3$, $\left\lfloor \frac{100}{3^4} \right\rfloor = \lfloor 1.234... \rfloor = 1$,
 $\left\lfloor \frac{100}{3^5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{3^6} \right\rfloor = \dots = 0$. D.h. $\nu_3(100!) = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$.

Als nächstes bestimmen wir die 2-adische Ordnung der Fibonacci-Zahlen: Zur Erinnerung: Die Fibonacci-Zahlen $(F_n)_{n \geq 0}$ sind durch die Startwerte $F_0 = 0, F_1 = 1$ und die Rekursion $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$

definiert. Was kann man über $\nu_2(F_n)$ sagen?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
$\nu_2(F_n)$	0	0	1	0	0	3	0	0	1	0	0	4	0	0	1	0	0	3
n	19	20	21	22	23	24												
F_n	4181	6765	10946	17711	28657	46368												
$\nu_2(F_n)$	0	0	1	0	0	5												

Allgemein gilt (Satz von Lengyel): $\nu_2(F_n) = 0$, falls $3 \nmid n$, $\nu_2(F_n) = 1$, falls $n = 6\ell_1 + 3, \ell_1 \geq 0$, $\nu_2(F_n) = 3$, falls $n = 12\ell_2 + 6, \ell_2 \geq 0$, $\nu_2(F_n) = \nu_2(n) + 2$, falls $12 \mid n$. Der Satz von Lengyel zeigt, dass $\nu_2(F_n) \leq \nu_2(n) + 2 \leq \log_2(n) + 2$. Andererseits wissen wir, dass $F_n > \alpha^{n-2} > 1.6^{n-2}$, wobei $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$. **D.h., dass die Größe von F_n mindestens exponentiell in n ist, während die Größe von $\nu_2(F_n)$ höchstens logarithmisch in n ist.** Diese Information ist sehr wichtig bei Anwendungen und, wie wir gleich sehen werden, ist sie im Prinzip auch ähnlich für die k -Fibonacci-Zahlen. Allgemeiner betrachten wir die 2-adische Ordnung der k -Fibonacci und k -Lucas Zahlen: Für $k \geq 1$ sei $(F_{k,n})_{n \geq 0}$ durch die Startwerte $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ und die Rekursion $F_{k,n} = k \cdot F_{k,n-1} + F_{k,n-2}$ für $n \geq 2$ definiert. Dann nennt man $F_{k,n}$ die k -Fibonacci Zahlen. Für $k = 1$ sind die Zahlen $F_{1,n}$ die Fibonacci-Zahlen. Für $k \geq 1$ sei $(L_{k,n})_{n \geq 0}$ durch die Startwerte $L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k$ und die gleiche Rekursion $L_{k,n} = k \cdot L_{k,n-1} + L_{k,n-2}$ für $n \geq 2$ definiert. Dann nennt man $L_{k,n}$ die k -Lucas Zahlen. Die k -Fibonacci und k -Lucas Zahlen sind parametrische Rekursionen mit Parameter $k \geq 1$. Es gilt (Satz von Kreutz, Lelis, Marques, Silva, Trojovski):

$$\nu_2(F_{k,n}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 2 \nmid k, 3 \nmid n \\ 1, & \text{falls } 2 \nmid k, n = 6\ell_1 + 3 \ (\ell_1 \geq 0) \\ 3, & \text{falls } 2 \nmid k, n = 12\ell_2 + 6 \ (\ell_2 \geq 0) \\ \nu_2(n) + 2, & \text{falls } 2 \nmid k, 12 \mid n \\ 0, & \text{falls } 2 \mid k, 2 \nmid n \\ \nu_2(k) + \nu_2(n) - 1, & \text{falls } 2 \mid k, 2 \mid n. \end{cases}$$

$$\nu_2(L_{k,n}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 2 \nmid k, 3 \nmid n \\ 2, & \text{falls } 2 \nmid k, n = 6\ell_3 + 3 \ (\ell_3 \geq 0) \\ 1, & \text{falls } 2 \nmid k, n = 6\ell_4 \ (\ell_4 \geq 1) \\ \nu_2(k), & \text{falls } 2 \mid k, 2 \nmid n \\ 1, & \text{falls } 2 \mid k, 2 \mid n. \end{cases}$$

Aus dem obigen Satz ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \nu_2(F_{k,n}) &\leq \nu_2(n) + \nu_2(k) + 2 \leq \\ &\leq \log_2 n + \log_2 k + 2 = \log_2(nk) + 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Wir haben schon erwähnt, dass wir $F_{1,n} > \alpha^{n-2} > 1.6^{n-2}$ für $k = 1$ haben, wobei $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Da $F_{k,n} \geq F_{1,n}$, folgt, dass

$$F_{k,n} > 1.6^{n-2}. \quad (2)$$

D.h., dass die Größe von $F_{k,n}$ mindestens exponentiell in n ist, während die Größe von $\nu_2(F_{k,n})$ höchstens logarithmisch in $n \cdot k$ ist.

Wir betrachten die Gleichung

$$F_{k,n} = m! \quad (3)$$

und verwenden (1) und (2), um eine obere Schranke für n anzugeben, die nur von k abhängt. Aus (3) folgt, dass

$$\nu_2(F_{k,n}) = \nu_2(m!). \quad (4)$$

Wir haben (siehe [Arbeitsauftrag 4](#))

$$\nu_2(m!) \geq \frac{m-1}{2}. \quad (5)$$

Wir kombinieren jetzt (5), (4) und (1) und bekommen

$$\frac{m-1}{2} \leq \nu_2(m!) = \nu_2(F_{k,n}) \leq \log_2(nk) + 2. \quad (6)$$

Aus (6) folgt, dass

$$m \leq 2 \log_2(nk) + 5. \quad (7)$$

Wegen (2) und $m! \leq m^m$, haben wir

$$1.6^{n-2} < F_{k,n} = m! \leq m^m.$$

In der obigen Ungleichung nehmen wir den Logarithmus von beiden Seiten zur Basis 2. Wir erhalten

$$(n-2) \log_2(1.6) < m \log_2(m). \quad (8)$$

Wir kombinieren (8) und (7) und bekommen

$$(n-2) \log_2(1.6) < (2 \log_2(nk) + 5) \log_2(2 \log_2(nk) + 5). \quad (9)$$

Für $n \leq k$ sind wir fertig. Für $k < n$ führt die Ungleichung (9) zu

$$(n-2) \log_2(1.6) < (2 \log_2(n^2) + 5) \log_2(2 \log_2(n^2) + 5). \quad (10)$$

Mit Hilfe des Computers erhalten wir aus (10), dass $n \leq 142$ und somit $n \leq \max\{k, 142\}$. Der Beweis zeigt, wie nützlich es ist, die 2-adische Ordnung bestimmter Folgen zu kennen. Für festes k kann man eine absolute obere Schranke für n berechnen ($n \leq \max\{k, 142\}$) und die Gleichung $F_{k,n} = m!$ vollständig lösen.

Jetzt zur Gleichung $F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1$: Eine Cullen-Zahl ist eine Zahl der Form $m \cdot 2^m + 1$. Mit diesen Zahlen hat sich James Cullen 1905 beschäftigt. Wir betrachten die Gleichung

$$F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1.$$

Die Gleichung kann natürlich auch in die Form

$$F_{k,n} - 1 = m \cdot 2^m \quad (11)$$

umgeschrieben werden. In diesem Fall wäre es nützlich, Information über $\nu_2(F_{k,n} - 1)$ zu wissen. Aus [Arbeitsauftrag 9](#) folgt, dass $F_{k,n} - 1$ immer eine Darstellung der Form $F_{k,n} - 1 = F_{k,a} \cdot L_{k,b}$ hat, wobei diese Darstellung vom Rest der Division von n durch 4 abhängt und a und b von n abhängen. Wir betrachten den Fall, wenn der Rest von n durch 4 gleich 1 ist, d. h., wir betrachten die Gleichung

$$F_{k,4n+1} = m \cdot 2^m + 1 \quad (12)$$

In diesem Fall (siehe [Arbeitsauftrag 9](#)), haben wir

$$F_{k,4n+1} - 1 = F_{k,2n} \cdot L_{k,2n+1} \quad (13)$$

Aus dem Satz von Kreutz, Lelis, Marques, Silva, Trojovski folgt

$$\nu_2(F_{k,2n}) \leq \nu_2(2n) + \nu_2(k) + 2 \quad \text{und} \quad \nu_2(L_{k,2n+1}) \leq \nu_2(k) + 1. \quad (14)$$

Aus (13), (14) und [Arbeitsaufträge 2 und 3](#) bekommen wir, dass

$$\nu_2(F_{k,4n+1} - 1) = \nu_2(F_{k,2n}) + \nu_2(L_{k,2n+1}) \leq \log_2(2n) + 2\log_2(k) + 3. \quad (15)$$

Da $\nu_2(m \cdot 2^m) = \nu_2(m) + m \geq m$, folgt

$$m \leq \nu_2(m \cdot 2^m) = \nu_2(F_{k,n} - 1) \leq \log_2(2n) + 2\log_2(k) + 3. \quad (16)$$

Wir wissen noch

$$F_{k,n} > 1.6^{n-2} \quad \text{und} \quad m \cdot 2^m + 1 < 2m \cdot 2^m = m \cdot 2^{m+1}.$$

Somit

$$\begin{aligned} (n-2)\log_2(1.6) &< m+1+\log_2 m \leq \\ &\leq \log_2(2n) + 2\log_2(k) + 4 + \log_2(\log_2(2n) + 2\log_2(k) + 3). \end{aligned} \quad (17)$$

Für $n \leq k$ sind wir fertig. Für $k < n$ erhalten wir aus (17)

$$(n-2)\log_2(1.6) < \log_2(2n) + 2\log_2(n) + 4 + \log_2(\log_2(2n) + 2\log_2(n) + 3).$$

Somit $n \leq 123$. D.h $n \leq \max\{k, 123\}$.

Fibonacci, k -Fibonacci, Cullen und mehr

Handout

Dr. István Pink
22.04.2025

Grundsätzlich: Wir bestimmen die 2-adische Ordnung der k -Fibonacci-Zahlen $F_{k,n}$ und verwenden sie, um eine scharfe Schranke für n in der Gleichungen $F_{k,n} = m!$ und $F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1$ zu erhalten, die nur von k abhängt. Für ein gegebenes k wird daher die vollständige Lösung der Gleichungen $F_{k,n} = m!$ und $F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1$ möglich.

Technologieeinsatz mit Sage:

Link zu SageCell: <https://sagecell.sagemath.org/>

Einige nützliche Sage-Befehle: `fibonacci(n)`, `BinaryRecurrenceSequence(a,b,u0,u1)`, `ZZ.valuation(2)(n)`, `ZZ.valuation(p)(n)`, `factorial(n)`

Programm in Stichworten:

2-adische und p -adische Ordnung einer ganzen Zahl ($\nu_2(n), \nu_p(n)$), p -adische Ordnung der Faktorielle (Satz von Legendre), 2-adische Ordnung der Fibonacci Zahlen (Satz von Lengyel), Definition der k -Fibonacci Zahlen, Definition von k -Lucas Zahlen, Eigenschaften und Zusammenhänge, 2-adische Ordnung der k -Fibonacci und k -Lucas Zahlen (Satz von Kreutz, Lelis, Marques, Silva, Trojovsky), Die Gleichungen $F_{k,n} = m!$ und $F_{k,n} = m \cdot 2^m + 1$.

Arbeitsaufträge:

- Bestimme die p -adische Ordnung der folgenden ganzen Zahlen (mit Hand oder per Computer) $\nu_2(284), \nu_3(357), \nu_p(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$, (wobei p eine beliebige Primzahl ist), $\nu_2(2n+1)$.
- Seien $a \neq 0, b \neq 0$ ganze Zahlen und p eine Primzahl. Zeige, dass $\nu_p(a \cdot b) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$.
- Sei $n > 0$ eine ganze Zahl. Zeige, dass $\nu_2(n) \leq \log_2(n)$.
- Bestimme (mit Hand oder per Computer) $\nu_2(8!), \nu_3(13!), \nu_5(11!)$. Zeige, dass $\nu_2(m!) \geq \frac{m-1}{2}$.
- Sei $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ die Fibonacci-Folge. Berechne $\nu_2(F_n)$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. Was fällt auf?
- Sei $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ und $F_{k,n} = k \cdot F_{k,n-1} + F_{k,n-2}$ die k -Fibonacci-Folge. Berechne (mit Hand oder Computer) $\nu_2(F_{k,n})$ für $k = 2, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ und für $k = 3, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. Was fällt auf?
- Sei $L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k$ und $L_{k,n} = k \cdot L_{k,n-1} + L_{k,n-2}$ die k -Lucas-Folge. Berechne (mit Hand oder Computer) $\nu_2(L_{k,n})$ für $k = 4, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ und für $k = 5, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.
- Es ist bekannt, dass für jedes $k \geq 1$ und $n \in \mathbb{Z}$ $F_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ und $L_{k,n} = \alpha^n + \beta^n$ gelten, wobei $\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ und $\beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$. Bestimme $F_{k,-1}$ und $F_{k,-2}$ und beweise, dass

$$F_{k,m+n} + (-1)^n \cdot F_{k,m-n} = F_{k,m} \cdot L_{k,n}. \quad (18)$$

- Unter Verwendung der Gleichung (18) zeige, dass für $k \geq 1$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$F_{k,4n+1} - 1 = F_{k,2n} \cdot L_{k,2n+1};$$

$$F_{k,4n+2} - 1 = F_{k,2n} \cdot L_{k,2n+2}; \quad F_{k,4n+3} - 1 = F_{k,2n+2} \cdot L_{k,2n+1}.$$