Die Interpolation als mathematisches Modell

Miriam Schönauer, MSc

Handout

12.04.2023

Grundsätzlich: Finde zu einer gegebenen Menge an Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ mit zugehörigen Werten $y_0, \dots, y_n$ eine Funktion g einer bestimmten Klasse (z.B. Polynome) mit der Eigenschaft $g(x_i) = y_i$. Die Polynominterpolation kann mithilfe dividierter Differenzen effizient am Computer umgesetzt werden.
Technologieeinsatz mit Python:
Link zu Replit: `https://replit.com/join/pphjblrzxq-miriamscho`
Programm in Stichworten:
Polynome, Polynominterpolation, Lineare Gleichungssysteme (Aufstellen und Lösen), Monombasis, Newton-Basis, Dividierte Differenzen, Erarbeitung eines mathematischen Modells, Analyse der Grenzen des Modells und Lösungsansätze

Es seien Werte $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ (z.B. Messungen oder Funktionsauswertungen) zu endlich vielen, paarweise verschiedenen Punkten $x_0, \dots, x_n \in D$ vorgegeben. Es soll eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ einer bestimmten Klasse P von Funktionen mit der Eigenschaft

$$g(x_i) = y_i, \qquad \text{für } i = 0, \dots, n$$

ermittelt werden. Diese Problemstellung ist als Interpolationsaufgabe bekannt. Die Interpolation findet u.a. Anwendung in der Technik, z.B. bei Scannern, die durch Interpolation ihre Auflösung verbessern. Als Klasse P verwendet man Funktionen wie Polynome, mit denen man besonders „einfach" arbeiten kann. Es bezeichne

$$P_n := \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n \right\}$$

den Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Die Interpolationsaufgabe lautet damit nun: Bestimme ein Polynom $p \in P_n$ zu $(n+1)$ gegebenen, paarweise verschiedenen Punkten $x_0, \dots, x_n$ mit den zugehörigen Auswertungen $y_0, \dots, y_n$, sodass

$$p(x_i) = y_i, \qquad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Diese Aufgabe lässt sich als das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n & = & y_0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n & = & y_n \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

formulieren. Da die Punkte $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschieden sind, ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar. Somit löst genau ein Polynom p die Interpolationsaufgabe.
Obiges Gleichungssystem lässt sich mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren lösen, allerdings kann es durch eine geschickte Wahl der Polynombasis auf eine einfachere Form gebracht werden. Man verwendet dazu die Newton-Basispolynome:

$$N_0(x) := 1$$
$$N_i(x) := \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \qquad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung:

Der Lösungsansatz

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i N_i(x)$$

liefert das System

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_0 + a_1(x_1 - x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) &= y_n. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich nun durch sogenanntes *Vorwärtseinsetzen*, also durch sukzessives Einsetzen von oben nach unten, lösen.

Arbeitsauftrag: Berechne das Interpolationspolynom p zu den Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ und den Werten $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 1$.

Die Koeffizienten a_i lassen sich neben dem Vorwärtseinsetzen noch auf eine andere Weise berechnen; nämlich mithilfe der dividierten Differenzen:

$$\begin{aligned} y[x_i] &:= y_i, \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n \\ y[x_i, \ldots, x_{i+k}] &:= \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - y[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n-i \end{aligned}$$

Das Interpolationspolynom p zu den gegebenen Stellen $x_0, \ldots, x_n$ und Werten $y_0 \ldots, y_n$ ist in der Newton-Basis damit gegeben durch

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y[x_0, \ldots, x_i] N_i(x).$$

Die dividierten Differenzen lassen sich besonders einfach berechnen, in dem sie in einem Tableau angeordnet werden (dies eignet sich besonders für die Implementierung). Für $n = 2$ beispielsweise nimmt dieses Tableau die folgende Gestalt an:

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	x_0	$y[x_0]$	$\frac{y[x_1]-y[x_0]}{x_1-x_0}$	$\frac{y[x_1,x_2]-y[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
1	x_1	$y[x_1]$	$\frac{y[x_2]-y[x_1]}{x_2-x_1}$	
2	x_2	$y[x_2]$		

Die gesuchten Koeffizienten von p in der Newton-Basis kann man in der ersten Zeile ablesen.

Arbeitsauftrag: Berechne das Interpolationspolynom p für die Punkte $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ und den Auswertungen $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 1$ mithilfe der dividierten Differenzen.

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung:

Die Verwendung der Newton-Basispolynome birgt einen weiteren Vorteil: Sollen im Nachhinein noch eine weitere Stelle x_{n+1} mit zugehörigem Wert y_{n+1} miteinbezogen werden, ergibt sich das entsprechende Interpolationspolynom q zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n, x_{n+1}$ und Werten $y_0, \dots, y_n, y_{n+1}$ aus dem alten Interpolationspolynom. Es gilt nämlich:

$$q(x) = p(x) + y[x_0, \dots, x_{n+1}]N_{n+1}(x).$$

Die neue dividierte Differenz $y[x_0, \dots, x_{n+1}]$ lässt sich dabei ebenfalls aus dem alten Tableau berechnen. Dafür wird in den ersten beiden Spalten x_{n+1} und y_{n+1} ergänzt und die restlichen Terme der Diagonale berechnet. Im Fall des obigen Beispieltableaus führt dies zu

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, \dots, x_{i+3}]$
0	x_0	$y[x_0]$	$\frac{y[x_1]-y[x_0]}{x_1-x_0}$	$\frac{y[x_1,x_2]-y[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\boldsymbol{\frac{y[x_1,x_2,x_3]-y[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}}$
1	x_1	$y[x_1]$	$\frac{y[x_2]-y[x_1]}{x_2-x_1}$	$\boldsymbol{\frac{y[x_2,x_3]-y[x_1,x_2]}{x_3-x_1}}$	
2	x_2	$y[x_2]$	$\boldsymbol{\frac{y[x_3]-y[x_2]}{x_3-x_2}}$		
3	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{y[x_3]}$			

Arbeitsauftrag: Es seien $x_3 = 4$ und $y_3 = 2$. Berechne mithilfe dividierter Differenzen und dem bereits bestimmten Interpolationspolynom p das neue Interopolationspolynom q in den Stellen $x_0, \dots, x_3$ mit Auswertungen $y_0, \dots, y_3$.

Bearbeitung mit Python:
Mit dem auf Replit zugänglichen Python-Code lassen sich verschiedene Beispiele zur Interpolation bearbeiten. Die Simulationen dienen zur Veranschaulichung der Interpolation, zeigen aber auch deren Grenzen auf.
Bemerkung: Haben Schüler*innen mehr Erfahrung mit Python, so können sie versuchen, die Interpolation selbst zu implementieren mithilfe des dividierten Differenzen Schemas.
Arbeitsaufträge:

- Mache dich mit dem Python Code vertraut. Welche Funktionen übernehmen die einzelnen Variablen? Im welchen Teil des Codes wird das Interpolationspolynom berechnet?
- Zu Beispiel 1: Welche Funktion wird hier interpoliert? Experimentiere mit verschiedenen Intervallgrenzen und variiere zudem die Anzahl an Stützstellen.
- Zu Beispiel 2: Welche Funktion wird hier interpoliert? Was fällt bei geringer Anzahl an Stützstellen auf?
- Zu Beispiel 3: Welche Funktion wird hier interpoliert? Gehe zu Beispiel 4 und überprüfe deine Vermutung.
- Zu Beispiel 5 und 6: Welche Funktionen werden hier interpoliert? Experimentiere mit der Anzahl an Stützstellen. Was fällt dir dabei auf?
- Zu Beispiel 5 und 6: Sieh dir die Form der Funktionen an, die interpoliert werden. Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Form der Funktionen und dem beobachteten Verhalten bei der Interpolation?

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung:

- Zu Beispiel 7: Welche Funktion wird hier interpoliert? Erhöhe schrittweise die Anzahl an Stützstellen. Was fällt dir auf? Kannst du eine Erklärung für das beobachtete Verhalten finden?
- Wie wirkt sich die Anzahl an verwendeten Stützstellen auf die Güte der Interpolation aus?
- Welche Probleme sind bei den Simulationen aufgetreten? Hast du Lösungsansätze für diese Probleme?

Literatur:

1. Rannacher, Rolf: Numerik 0: Einführung in die Numerische Mathematik, Heidelberg: Heidelberg University Publishing, 2017. https://doi.org/10.17885/heiup.206.281

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung: