

Berechnung von π

Unterlagen für Lehrende

Dr. Patrick Bammer; Miriam Schönauer, MSc

21. Mai 2024

Grundsätzlich: Mithilfe der Methode von Archimedes wird ein numerischer Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung von π erarbeitet. Dabei werden wichtige mathematische Objekte wie Kreisbogen, Zentriwinkel, Sehnenpolygone und Tangentenpolygone besprochen.

Programm in Stichworten: Kreisbogen und Zentriwinkel, Sehnenpolygon, Tangentenpolygon, Bogenlänge, Satz von Archimedes, Halbierung der Zentriwinkel, Approximation von π

Dauer: 2 Unterrichtseinheiten; Voraussetzung: Grundlegende Kenntnisse über Sekanten, Tangenten, Kreise, Dreiecke, Strahlensatz; Niveau: ★★

Kreisbogen und Zentriwinkel

Es bezeichne $\kappa_r(\mathbf{m})$ den Kreis mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $\mathbf{m} = (m_1, m_2)^\top$, i.e.

$$\kappa_r(\mathbf{m}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 ; |\mathbf{x} - \mathbf{m}| = r\}.$$

Jede Kreissehne durch zwei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \kappa_r(\mathbf{m})$ definiert einen zugehörigen *Zentriwinkel* $\alpha = \angle \mathbf{amb}$, sowie einen *Kreisbogen* γ , wie in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

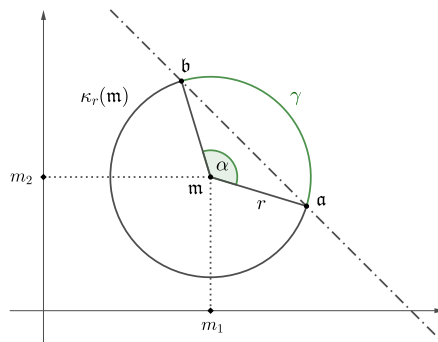


Abbildung 1: *Kreisbogen und Zentriwinkel zu einer Kreissehne.*

Es bezeichne nun stets γ der durch die Kreissehne $\mathbf{ab}$ definierte Kreisbogen mit Zentriwinkel α .

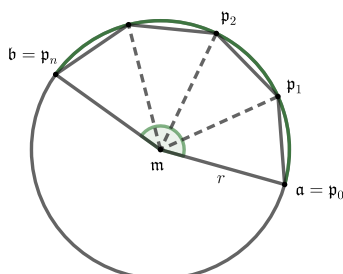
Regelmäßiges Sehnenpolygon

Unter einem *regelmäßigen Sehnenpolygon* des Kreisbogens γ verstehen wir einen Streckenzug $\sigma = \overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n}$ mit

$$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \gamma, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{a}, \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{b}.$$

mit der Eigenschaft, dass alle Strecken $\overline{\mathbf{p}_{k-1} \mathbf{p}_k}$ gleich lang sind. Damit gilt insbesondere $\angle \mathbf{p}_{k-1} \mathbf{m} \mathbf{p}_k = \frac{\alpha}{n}$. Ferner bezeichne

- $\ell(\sigma)$ die *Länge* von σ , also die Summe der Längen der Strecken $\overline{p_{k-1}p_k}$ für $1 \leq k \leq n$.
- $m\sigma$ jenes Vieleck, welches durch Verbinden der Endpunkte von σ mit dem Kreismittelpunkt m entsteht und $A(m\sigma)$ dessen *Fläche*, also die Summe der Dreiecksflächen $\Delta p_{k-1}mp_k$ für $1 \leq k \leq n$.



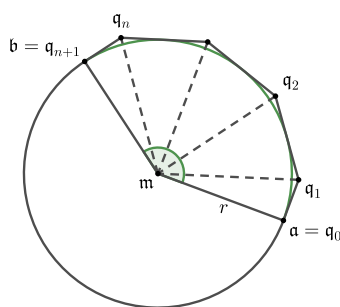
Regelmäßiges Tangentenpolygon

Wir nennen einen Streckenzug $\tau = \overline{q_0q_1 \cdots q_n}$ ein *regelmäßiges Tangentenpolygon* des Kreisbogens γ , falls

$$q_0 = a, \quad q_n = b$$

sowie alle Strecken $\overline{q_{k-1}q_k}$ für $1 \leq k \leq n$ Tangenten an den Kreisbogen γ darstellen und die Strecken $\overline{q_{k-1}q_k}$ für $2 \leq k \leq n-1$ gleich lang und die erste und letzte Strecke $\overline{q_0q_1}$ und $\overline{q_{n-1}q_n}$ gerade halb so lang sind. Ferner bezeichne

1. $\ell(\tau)$ die *Länge* von τ , also die Summe der Längen der Strecken $\overline{q_{k-1}q_k}$ für $1 \leq k \leq n$.
2. $m\tau$ jenes Vieleck, welches durch Verbinden der Endpunkte von τ mit dem Kreismittelpunkt m entsteht und $A(m\tau)$ dessen *Fläche*, also die Summe der Dreiecksflächen $\Delta q_{k-1}mq_k$ für $1 \leq k \leq n$.



Jedem regelmäßigem Tangentenpolygon $\tau = \overline{q_0q_1 \cdots q_{n+1}}$ mit $q_0 = a$, $q_{n+1} = b$ können wir, wie in Abbildung 4 dargestellt, ein Polygon $\vartheta = \overline{v_0v_1 \cdots v_n}$ derselben Länge zuordnen, dessen Seiten $\overline{v_{k-1}v_k}$ für $1 \leq k \leq n$ alle gleich lang sind und den Kreis in ihrem Mittelpunkt berühren. In diesem Fall ist $\angle v_{k-1}mv_k = \frac{\alpha}{n}$ für $1 \leq k \leq n$. Wir wollen im Folgenden stets solche modifizierten Tangentenpolygone betrachten, sprechen aber weiterhin nur von *regelmäßigen Tangentenpolygonen* und bezeichnen diese wieder mit τ .

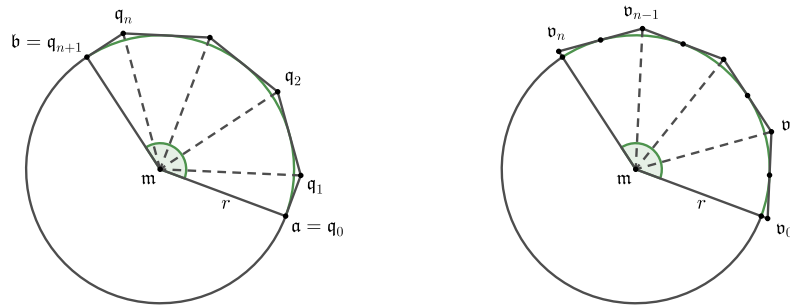


Abbildung 2: *Regelmäßiges Tangentenpolygon (links) und midifiziertes Tangentenpolygon (rechts) gleicher Länge.*

Arbeitsauftrag 1

Bogenlänge

Es sei γ der durch die Kreissehne ab definierte Kreisbogen mit Zentriwinkel $0 < \alpha \leq 360^\circ$. Dann heißt

$$b(\alpha) := \sup \{ \ell(\sigma) ; \sigma \text{ ist Sehnenpolygon von } \gamma \} = \inf \{ \ell(\tau) ; \tau \text{ ist Tangentenpolygon von } \gamma \}$$

die *Bogenlänge* des Kreisbogens γ zum Zentriwinkel α .

Das heißt für ein regelmäßiges Sehnen- und Tangentenpolygon σ und τ des Kreisbogens γ bilden die Längen $\ell(\sigma)$ und $\ell(\tau)$ jeweils eine untere und obere Schranke für die Bogenlänge d.h.

$$\ell(\sigma) < b(\alpha) < \ell(\tau).$$

Aus dem Satz von Archimedes folgt für die Bogenlänge $b(\alpha)$, dass sie durch

$$b(\alpha) = \frac{r\pi\alpha}{180},$$

gegeben ist. Falls nun γ der Kreisbogen auf dem Einheitskreis ist mit Zentriwinkel $\alpha = 180^\circ$, ist die Bogenlänge folglich gegeben durch $b(\alpha) = \pi$. Es liefern also die Längen der regelmäßigen Sehnen- und Tangentenpolygone σ und τ des Kreisbogens γ eine obere und untere Schranke für π d.h.

$$\ell(\sigma) < \pi < \ell(\tau).$$

Somit können alle $m \in [\ell(\sigma), \ell(\tau)]$ als Näherungswerte für π herangezogen werden. Die zuverlässigste Wahl ist in diesem Fall der Mittelpunkt

$$m = \frac{\ell(\sigma) + \ell(\tau)}{2}$$

da die Fehlerabschätzung

$$|m - \pi| < \frac{\ell(\tau) - \ell(\sigma)}{2}$$

stets gilt.

Um eine bessere Näherung an π zu erhalten, müsste man nun ein Sehnen- und Tangentenpolygon σ' und τ' auf γ konstruieren, mit der Eigenschaft

$$\ell(\sigma) < \ell(\sigma') \text{ und } \ell(\tau') < \ell(\tau).$$

Daraus würde für $m' \in [\ell(\sigma'), \ell(\tau')]$ nämlich folgen

$$|m' - \pi| < \frac{\ell(\tau') - \ell(\sigma')}{2} < \frac{\ell(\tau) - \ell(\sigma)}{2},$$

womit m' eine bessere Annäherung an π als m wäre.

Ausgehend von einem Sehnen- und Tangentenpolygon σ und τ auf γ können so ein σ' und τ' mithilfe der Halbierung der Winkel α_k konstruiert werden.

Halbierung der Zentriwinkel

Es seien σ und τ ein regelmäßiges Sehnen- bzw. Tangentenpolygon mit n Seiten und Winkeln $\alpha_k = \frac{\alpha}{n}$ für $1 \leq k \leq n$. Bezeichnen σ' und τ' jenes regelmäßige Sehnen- bzw. Tangentenpolygon mit $2n$ Seiten und Zentriwinkeln $\alpha'_k = \frac{\alpha}{2n}$ für $1 \leq k \leq 2n$, so gilt: Die Längen der Sehnen- und Tangentenpolygone σ' und τ' berechnen sich zu

$$\ell(\tau') = 2 \cdot \frac{\ell(\sigma) \cdot \ell(\tau)}{\ell(\sigma) + \ell(\tau)}, \quad \ell(\sigma') = \sqrt{\ell(\sigma) \cdot \ell(\tau')}.$$

Darüber hinaus gelten die Ungleichungen

$$\ell(\sigma) < \ell(\sigma') < \ell(\tau') < \ell(\tau), \quad \ell(\tau') - \ell(\sigma') < \frac{\ell(\tau) - \ell(\sigma)}{2}.$$

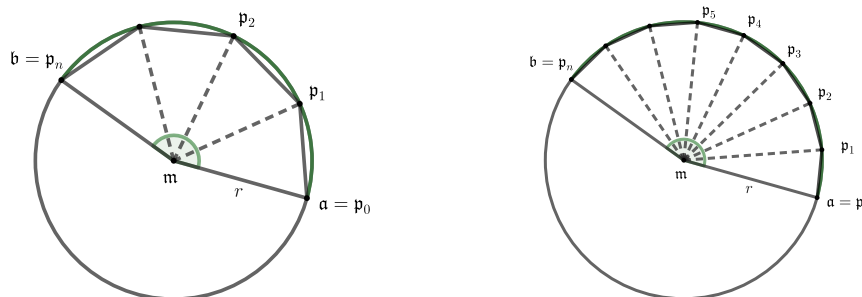


Abbildung 3: *Regelmäßiges Sehnenpolygon (links) mit n Seiten und regelmäßiges Sehnenpolygon mit $2n$ Seiten*

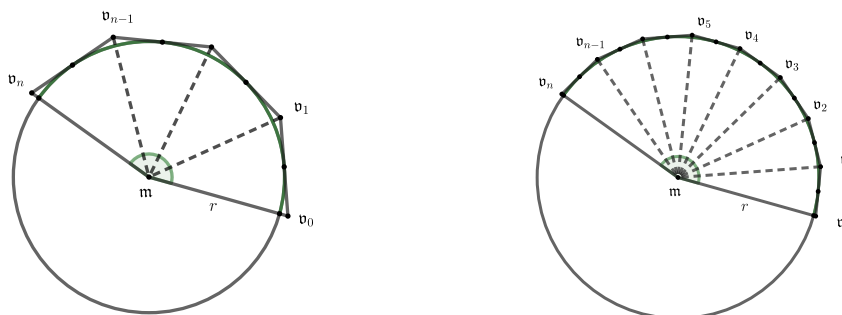


Abbildung 4: *Regelmäßiges Tangentenpolygon (links) mit n Seiten und regelmäßiges Tangentenpolygon mit $2n$ Seiten*

Arbeitsauftrag 2-4

Approximative Berechnung der Kreiszahl π

Nun kann ein Algorithmus zur approximativen Berechnung von π angegeben werden. Es seien als Startpolygone das regelmäßige Sehnens- und Tangentenpolygon σ_0 und τ_0 zum Zentriwinkel $\alpha = 180^\circ$ mit jeweils drei gleich langen Seiten der Länge s bzw. t , wie in Abbildung 3 dargestellt, gegeben.

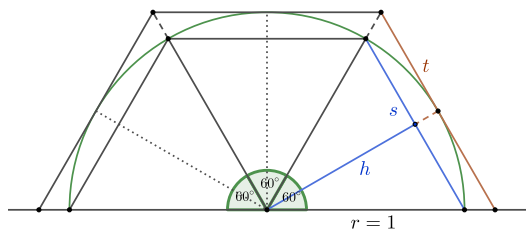


Abbildung 5: Startpolygone der Konstruktion nach Archimedes.

- (i) **Eingabe** – Wähle eine gewünschte Approximationsgenauigkeit $\varepsilon > 0$ und setze

$$\ell(\sigma_0) = 3s, \quad \ell(\tau_0) = 3t, \quad m_0 := \frac{3s + 3t}{2},$$

sowie $|I_0| := \ell(\tau_0) - \ell(\sigma_0)$.

- (ii) **Rechenvorschrift** – Für $k = 0, 1, 2, \dots$ berechne die Längen der halbierten Polygone

$$\ell(\tau_{k+1}) := 2 \cdot \frac{\ell(\sigma_k) \cdot \ell(\tau_k)}{\ell(\sigma_k) + \ell(\tau_k)}, \quad \ell(\sigma_{k+1}) := \sqrt{\ell(\sigma_k) \cdot \ell(\tau_{k+1})},$$

setze $|I_{k+1}| := \ell(\tau_{k+1}) - \ell(\sigma_{k+1})$ und bestimme

$$m_{k+1} := \frac{\ell(\sigma_{k+1}) + \ell(\tau_{k+1})}{2}, \quad e_{k+1} := \frac{1}{2} |I_{k+1}|.$$

Ist $e_{k+1} \leq \varepsilon$, so stellt m_{k+1} bereits eine Approximation der gewünschten Genauigkeit dar und wir brechen ab. Andernfalls wiederhole Schritt (ii).

- (iii) **Ausgabe** – Nach endlich vielen Schritten erhalten wir gemäß (ii) eine Näherung m_N mit

$$|m_N - \pi| < e_N \leq \varepsilon.$$

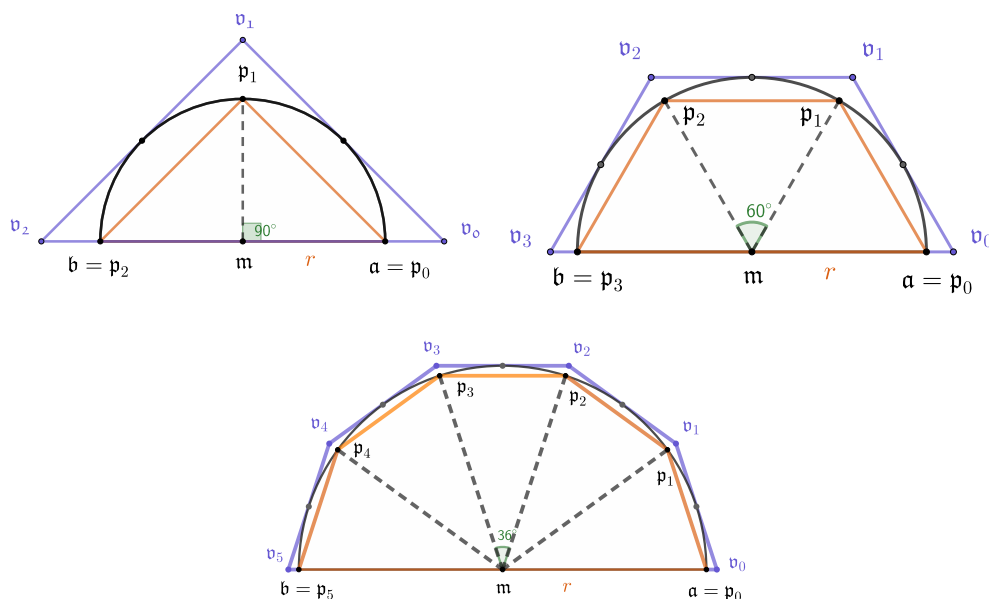
Berechnung von π

Handout – Lösungen

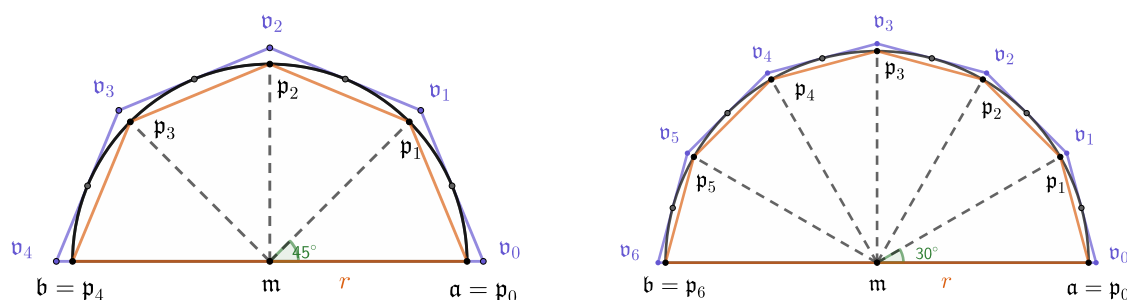
Dr. Patrick Bammer; Miriam Schönauer, MSc
21. Mai 2024

Arbeitsaufträge:

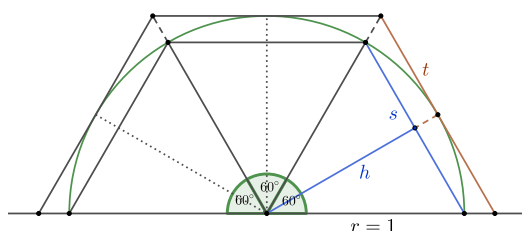
- Konstruiere für den Halbkreis regelmäßige Sehnepolygone $\sigma = \sigma(n) = \overline{p_0 p_1 \cdots p_n}$ und regelmäßige Tangentenpolygone τ für $n \in \{2, 3, 5\}$.



- Halbiere jeweils alle Winkel $\angle p_{k-1} m p_k = \frac{\alpha}{n}$ der Sehnepolygone $\sigma(n)$ aus Aufgabe 1 für $n \in \{2, 3\}$ und konstruiere die daraus resultierenden Sehnepolygone mit jeweils $2n$ Seiten.



- Berechne die Länge $\ell(\sigma_0)$ und $\ell(\tau_0)$ des regelmäßigen Sehnepolygons $\sigma_0 = \overline{p_0 p_1 \cdots p_n}$ und des Tangentenpolygons τ_0 mit Zentriwinkel $\angle p_{k-1} m p_k = 60^\circ$ für den Halbkreis mit Radius $r = 1$.



Da die Zentriwinkel durch $\alpha_k = 60^\circ$ gegeben sind, handelt es sich bei den Dreiecken zum Sehnepolygon σ_0 um gleichseitige Dreiecke handelt. Wegen $r = 1$ ergibt sich damit für die Länge des Sehnepolygons σ_0

$$\ell(\sigma_0) = 3s = 3.$$

Betrachten wir eines der gleichseitigen Dreiecke des Sehnepolygons σ_0 und das entsprechende Dreieck des Tangentenpolygons τ_0 , so liefert der Strahlensatz

$$r : h = t : s \quad \Rightarrow \quad 1 : h = t : 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{h}.$$

Dabei berechnet sich die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks nach dem *Satz des Pythagoras* zu

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folglich ist die Länge des Tangentenpolygons τ_0 gegeben durch

$$\ell(\tau_0) = 3t = 3 \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

4. Berechne die Flächen $A(\mathbf{m}\sigma_0)$ sowie $A(\mathbf{m}\tau_0)$ der Vielecke zu dem Sehnepolygon und Tangentenpolygon aus Aufgabe 3.

Da die Fläche eines Dreiecks Δ gegeben ist durch

$$A(\Delta) = \frac{1}{2} h_c \cdot c,$$

wobei c eine Seite des Dreiecks und h_c die Höhe auf der Seite c bezeichnet, ergibt sich für die Fläche der Polygone

$$\begin{aligned} A(\mathbf{m}\sigma_0) &= 3 \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \\ A(\mathbf{m}\tau_0) &= 3 \cdot \frac{1}{2} 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

5. Berechne ausgehend von dem Sehnepolygon und Tangentenpolygon σ_0, τ_0 aus Aufgabe 3 die Näherungswerte m_0, m_1 und m_2 für π mithilfe des vorgestellten Algorithmus.

$$\ell(\tau_0) = 2\sqrt{3}, \ell(\sigma_0) = 3, m_0 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \approx 3.232050807568877$$

$$\ell(\tau_1) \approx 3.215390309173473, \ell(\sigma_1) \approx 3.1058285412302493, m_1 \approx 3.1606094252018613$$

$$\ell(\tau_2) \approx 3.1596599420975005, \ell(\sigma_2) \approx 3.132628613281238, m_2 \approx 3.1461442776893693$$

Berechnung von π

Handout

Dr. Patrick Bammer; Miriam Schönauer, MSc

21. Mai 2024

Arbeitsaufträge:

1. Konstruiere für den Halbkreis regelmäßige Sehnenpolygone $\sigma = \sigma(n) = \overline{p_0 p_1 \cdots p_n}$ und regelmäßige Tangentenpolygone τ für $n \in \{2, 3, 5\}$.
2. Halbiere jeweils alle Winkel $\angle p_{k-1} m p_k = \frac{\alpha}{n}$ der Sehnenpolygone $\sigma(n)$ aus Aufgabe 1 für $n \in \{2, 3\}$ und konstruiere die daraus resultierenden Sehnen- und Tangentenpolygone mit jeweils $2n$ Seiten.
3. Berechne die Länge $\ell(\sigma_0)$ und $\ell(\tau_0)$ des regelmäßigen Sehnenpolygons $\sigma_0 = \overline{p_0 p_1 \cdots p_n}$ und des Tangentenpolygons τ_0 mit Zentriwinkel $\angle p_{k-1} m p_k = 60^\circ$ für den Halbkreis mit Radius $r = 1$.
4. Berechne die Flächen $A(m\sigma_0)$ sowie $A(m\tau_0)$ der Vielecke zu dem Sehnen- bzw. Tangentenpolygon aus Aufgabe 3.
5. Berechne ausgehend von dem Sehnen- und Tangentenpolygon σ_0, τ_0 aus Aufgabe 3 die Näherungswerte m_0, m_1 und m_2 für π mithilfe des vorgestellten Algorithmus.



FEEDBACK

Beschreibe Sehnen- und Tangentenpolygone. Wofür können sie verwendet werden?

Was hast du heute sonst gelernt?

Das hat mir gefallen	Das hat mir nicht gefallen

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung: