

Wurzelberechnung

Unterlagen für Lehrende

Miriam Schönauer, MSc
02. April 2024

Grundsätzlich: Mithilfe des Bisektionsverfahrens wird ein numerischer Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{2}$ erarbeitet. Dabei wird nicht nur die Konvergenz dieses Algorithmus gezeigt, sondern auch wichtige Konzepte wie die a priori und a posteriori Fehlerabschätzung besprochen.

Technologieeinsatz mit Python:

Links zu Replit:

1. <https://replit.com/join/uoqohewhwx-miriamscho> (Musterlösung Bisektionsverfahren)
2. <https://replit.com/join/mnzwdoaenw-miriamscho> (Musterlösung Newtonverfahren)
3. <https://replit.com/join/noqqbrwqbs-miriamscho> (Bisektionsverfahren leer)
4. <https://replit.com/join/bsvuodfoez-miriamscho> (Newtonverfahren leer)

Programm in Stichworten: Definition Algorithmus, Erarbeitung eines numerischen Algorithmus zur Berechnung von $\sqrt{2}$ Konvergenz des Algorithmus, a priori und a posteriori Fehlerabschätzung

Dauer: 2 Unterrichtseinheiten; Voraussetzung: Grundlegende Kenntnisse über (stetige) Funktionen, Wurzeln und irrationale Zahlen; Niveau: ★★

Unter einem Algorithmus verstehen wir eine Sammlung an Regeln und Operationen, deren Ausführung ein Problem aus einer Problemfamilie löst. Zudem lässt sich ein Algorithmus in drei Teile gliedern:

- **Eingabe:** Die Eingabe besteht aus allen Parametern, die für den Start des Algorithmus notwendig sind. z. B.: Zahlen, Funktionen etc.
- **Rechenvorschrift:** Die Rechenvorschrift besteht aus einer Abfolge an Grundoperationen und muss folgende drei Eigenschaften erfüllen:
 - *Definitheit:* Jeder Rechenschritt muss eindeutig und exakt festgelegt sein. Zudem muss in allen Situationen klar ersichtlich sein, welcher Rechenschritt ausgeführt werden soll.
 - *Allgemeingültigkeit:* Der Algorithmus muss auf eine gesamte Problemfamilie anwendbar sein. Welches Problem aus der Familie gelöst wird, wird dabei über die Eingabe gesteuert.
 - *Finitheit:* Die Rechenvorschrift muss nach endlich vielen Schritten beendet werden.
- **Ausgabe:** Die Ausgabe besteht aus den Größen, die der Algorithmus nach Ausführung der Rechenvorschrift ermittelt hat.

Anhand dieser Definition wollen wir nun einen Algorithmus zur Berechnung von Nullstellen von Funktionen der Form $f(x) = x^2 - a, a \in \mathbb{N}$ erstellen. Beispielhaft für diese Problemfamilie wird dies anhand der Berechnung der Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$ erfolgen. Dabei ist zu beachten, dass die Berechnung der Nullstellen von f äquivalent zur Berechnung der Zahlen $\pm\sqrt{2}$ ist. Weiterhin ist zu beachten, dass es sich bei $\pm\sqrt{2}$ um eine irrationale Zahl handelt und wir daher nur in der Lage sein werden, die Wurzel durch unseren Algorithmus zu approximieren.

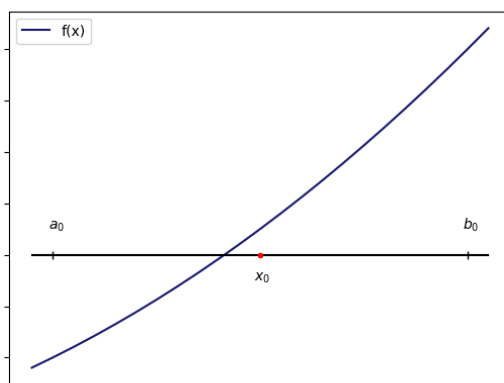
Zuerst gilt es den Bereich, in dem die Nullstelle liegt, einzuschränken. Dabei wird der Zwischenwertsatz eingesetzt, der besagt, dass wenn für ein Intervall $I = [a, b]$ gilt, dass $f(a)f(b) < 0$, dann hat f in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle. Mithilfe dieser Aussage können Intervalle getestet werden, um den möglichen Bereich der Nullstelle einer Funktion einzuschränken.

Arbeitsauftrag 1

Überprüft man das Intervall $I_0 := [a_0, b_0] = [1, 2]$, so stellt man fest, dass sich dort eine Nullstelle der Funktion f befindet. Allerdings sind weder a_0 noch b_0 besonders gute Näherungswerte für $\sqrt{2}$. Daher geht man nun wie folgt vor: Es wird der Mittelpunkt zwischen a_0 und b_0 ermittelt d.h.

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

und als erster Näherungswert bestimmt.

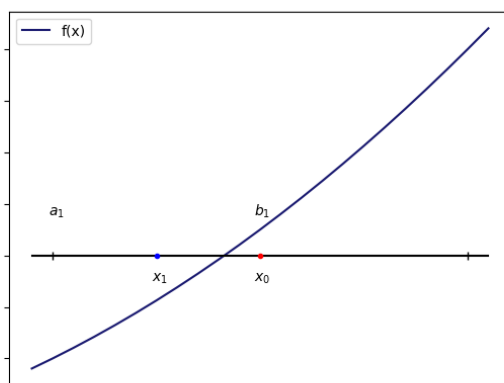


Dabei gilt für diesen Wert die Fehlerabschätzung

$$|x_0 - \sqrt{2}| < \frac{|b_0 - a_0|}{2},$$

da x_0 nicht weiter als die halbe Intervalllänge von $\sqrt{2}$ entfernt sein kann. Um den nächsten Näherungswert zu bestimmen, wird nun diejenige Intervallhälfte, bezeichnet mit $I_1 := [a_1, b_1]$, von I_0 halbiert, in der sich die Nullstelle befindet. In unserem Fall handelt es sich dabei um das Teilintervall $[a_0, x_0]$. Daher setzen wir $a_1 = a_0$ und $b_1 = x_0$ und berechnen

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$



Für diesen Näherungswert gilt wiederum die Fehlerabschätzung

$$|x_1 - \sqrt{2}| < \frac{|b_1 - a_1|}{2}.$$

Durch wiederholtes Ausführen der Halbierung der Intervalle, ergibt sich folgende Vorschrift:

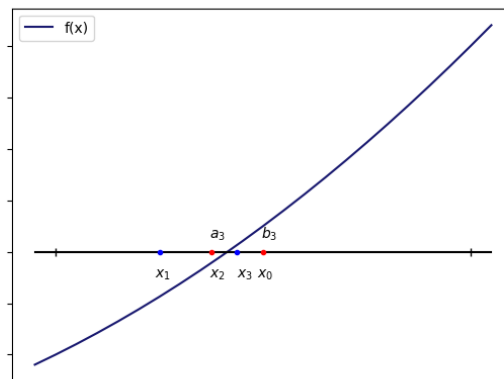
Für $j = 0, 1, 2, \dots$

$$x_j = x_1 = \frac{a_j + b_j}{2} \in I_j = [a_j, b_j]$$

Falls $f(a_j)f(x_j) < 0$: $a_{j+1} = a_j$ und $b_{j+1} = x_j$ mit $I_{j+1} = [a_{j+1}, b_{j+1}]$.

Falls $f(a_j)f(x_j) > 0$: $a_{j+1} = x_j$ und $b_{j+1} = b_j$ mit $I_{j+1} = [a_{j+1}, b_{j+1}]$.

Arbeitsauftrag 2



Für alle diese Näherungswerte gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_j - \sqrt{2}| < \frac{|b_j - a_j|}{2}. \quad (1)$$

Da nun aber das Intervall I_j genau halb so lang ist wie das Intervall I_{j-1} , ergibt sich durch Einsetzen die Fehlerabschätzung

$$|x_j - \sqrt{2}| < \frac{|b_{j-1} - a_{j-1}|}{2^2}.$$

Da dies für alle Intervalle gilt, erhält man durch Fortsetzen des obigen Schrittes die Fehlerabschätzung

$$|x_j - \sqrt{2}| < \frac{|b_0 - a_0|}{2^{j+1}}. \quad (2)$$

Betrachten wir den Grenzwert der Fehler

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |x_j - \sqrt{2}| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|b_0 - a_0|}{2^{j+1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{j+1}} = 0$$

so sehen wir, dass dieser 0 ist d.h. der Fehler konvergiert gegen 0. Die Werte x_j nähern sich tatsächlich $\sqrt{2}$ an und daher ist die Methode der Intervallhalbierung sinnvoll zur Approximation von $\sqrt{2}$.

Um aus der Intervallhalbierung einen Algorithmus zu machen, benötigen wir jetzt noch ein Abbruchkriterium, um die Definitheit der Rechenvorschrift zu garantieren. Dabei soll die Rechenvorschrift dann abbrechen, wenn eine gewisse Fehlertoleranz unterschritten ist, d.h.

$$|x_j - \sqrt{2}| < tol. \quad (3)$$

Dafür gibt es zwei Ansätze:

Mithilfe der Fehlerabschätzung (2) lässt sich ein j bestimmen, sodass

$$\frac{|b_0 - a_0|}{2^{j+1}} < tol$$

erfüllt ist und damit (3) gegeben ist. Damit kann die Rechenvorschrift nach Berechnung von x_j abgebrochen werden. Da zur Berechnung der Fehlerabschätzung (2) nur Werte benötigt sind, die bereits *vor* dem Start der Rechenvorschrift bekannt sind, nennt man (2) auch **a priori** Fehlerabschätzung.

Arbeitsauftrag 3

Der zweite Ansatz beruht auf der Tatsache, dass für jedes Intervall I_j entweder $a_j = x_{j-1}$ oder $b_j = x_{j-1}$ gilt. Daraus folgt, dass

$$|x_j - x_{j-1}| = \frac{|b_j - a_j|}{2}$$

gilt. Zusammen mit (1) ergibt sich

$$|x_j - \sqrt{2}| < |x_j - x_{j-1}|. \quad (4)$$

Gilt nun, dass

$$|x_j - x_{j-1}| < tol$$

so ist auch (3) erfüllt und die Rechenvorschrift kann mit Ausgabewert x_j abgebrochen werden. Da für die Berechnung von (4) Werte notwendig sind, die erst *nach* dem Start der Rechenvorschrift bekannt sind, nennt man (4) **a posteriori** Fehlerabschätzung.

Arbeitsauftrag 4

Jetzt kann die Intervallhalbierung bzw. Bisektionsverfahren als Algorithmus angeschrieben werden:

- **Eingabe:** Startintervall $I_0 = [a_0, b_0]$, Funktion $f(x) = x^2 - 2$ und Fehlertoleranz tol .
- **a priori Fehlerabschätzung:** Wenn a priori Ansatz verwendet wird, in diesem Schritt k bestimmen, sodass

$$|x_k - \sqrt{2}| < tol.$$

- **Rechenvorschrift:** Für $j = 0, 1, 2, \dots$ (bei a priori bis k):

1. Bestimme

$$x_j = \frac{a_j + b_j}{2}.$$

2. Bei **a posteriori** Fehlerschätzung wird ab $j \geq 1$ getestet, ob

$$|x_j - x_{j-1}| < tol.$$

Falls ja: Abbruch mit Ausgabe x_j .

Falls nein: Weiter mit den nächsten Schritten.

3. Falls $f(x_j) = 0$: Abbruch mit Ausgabe x_j .
4. Falls $f(a_j)f(x_j) < 0$: $a_{j+1} = a_j$ und $b_{j+1} = x_j$ mit $I_{j+1} = [a_{j+1}, b_{j+1}]$.
5. Falls $f(a_j)f(x_j) > 0$: $a_{j+1} = x_j$ und $b_{j+1} = b_j$ mit $I_{j+1} = [a_{j+1}, b_{j+1}]$.
6. Zurück zu Schritt 1.

- **Ausgabe:** Ausgabe von x_j .

Literatur:

1. Bammer, P., & Di Stolfo, P. (2021). Wurzelberechnung als Motivation numerischer Konzepte. Mathematik im Unterricht, 12, 49-61. <http://10.25598/miu/2021-12-5>
2. Rannacher, R. (2017). Numerik 0: Einführung in die Numerische Mathematik. Heidelberg University Publishing. <https://doi.org/10.17885/heiup.206.281>
3. Hämmerlin G., & Hoffmann K.H. (1992). Numerische Mathematik. Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00173-8>

Wurzelberechnung

Handout - Lösungen

Miriam Schönauer, MSc

02. April 2024

Arbeitsaufträge:

1. Besitzen die Polynome $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = x^2 - 3x + 1.25$ in den folgenden Intervallen eine Nullstelle?

- $[0, 1] : g$
- $[-2, -0.5] : f$
- $[1, 2] : f$
- $[1.5, 3] : g$

2. Berechne mithilfe des Bisektionsverfahrens die Näherungswerte x_2 und x_3 und aktualisiere die Listen der Intervallgrenzen entsprechend.

x_0	x_1	x_2	x_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1.5	1.25	1.375	1.4375	1	1	1.25	1.375	1.375	2	1.5	1.5	1.5	1.4375

3. Wie viele Schritte des Bisektionsverfahrens sind notwendig, um bei dem Startintervall $I_0 = [1, 2]$ eine Fehlertoleranz $tol = 10^{-5}$ zu erreichen?

$$|x_j - z| < \frac{1}{2^{j+1}} |b_0 - a_0| < 10^{-5} \iff 15.6096 \approx \frac{5 \cdot \log(10)}{\log(2)} - 1 < j \Rightarrow j = 16$$

4. Berechne die *a posteriori* Fehlerabschätzungen.

$ x_1 - z $	$ x_2 - z $	$ x_3 - z $
$ x_1 - x_0 = 0.25$	$ x_2 - x_1 = 0.125$	$ x_3 - x_2 = 0.0625$

Wurzelberechnung

Handout

Miriam Schönauer, MSc
02. April 2024

Arbeitsaufträge:

- Besitzen die Polynome $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = x^2 - 3x + 1.25$ in den folgenden Intervallen eine Nullstelle?
 - $[0, 1]$
 - $[-2, -0.5]$
 - $[1, 2]$
 - $[1.5, 3]$
- Berechne mithilfe des Bisektionsverfahrens die Näherungswerte x_2 und x_3 und aktualisiere die Listen der Intervallgrenzen entsprechend.

x_0	x_1	x_2	x_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1.5	1.25			1	1	1.25			2	1.5	1.5		

- Wie viele Schritte des Bisektionsverfahrens sind notwendig, um bei dem Startintervall $I_0 = [1, 2]$ eine Fehlertoleranz $tol = 10^{-5}$ zu erreichen?
- Berechne die *a posteriori* Fehlerabschätzungen.

$ x_1 - z $	$ x_2 - z $	$ x_3 - z $



FEEDBACK

Beschreibe das Bisektionsverfahren? Wofür kann es verwendet werden?

Was hast du heute sonst gelernt?

Das hat mir gefallen	Das hat mir nicht gefallen

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung: