

Ziffernalgorithmen

Unterlagen für Lehrende

Univ.-Prof. Dr. C. Fuchs
03.04.2024

Grundsätzlich: Gegeben sei eine reelle Zahl x . Wir können annehmen, dass $x \in (0, 1)$, d.h. zwischen 0 und 1 liegt. Gesucht sind Zifferndarstellungen, die eine Näherung der Zahl liefern. Untersucht wird dabei, wie gut die Näherung (im Vergleich zur Anzahl der Ziffern) ausfällt.

Technologieeinsatz mit Sage:

Link zu SageCell: <https://sagecell.sagemath.org/>

Einige nützliche Sage-Befehle: `floor`, `ceil`, `int`, `bin`, `oct`, `continued_fraction`, `convergent`, `period`, `preperiod`, `period_length`, `preperiod_length`, `quotient`, `value`

Programm in Stichworten: Dezimaldarstellung und Darstellung in anderen Basen, Kettenbruchentwicklung, Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung, Bestapproximationen, Anwendung auf das Lösen der Pellschen Gleichung.

Dauer: 2 Unterrichtseinheiten, Niveau: ★

In der Schule werden wir darauf trainiert, Zahlen mit Ziffern zu identifizieren und mit den Ziffern ein Stellenwertsystem zu verbinden. Z.B. 2, 20, 2024. Aber auch 2024,0403 mit Stellen nach dem Komma (es sind auch unendlich viele Nachkommastellen möglich). Wir setzen im Folgenden stets voraus, dass die reelle Zahl $x \in (0, 1)$ sein soll. Z.B. $x = 0,20240403 = 20240403/100000000$. Wir erhalten die Ziffernentwicklung von x wie folgt: Verschiebe das Komma um eine Stelle nach Rechts. Der Vorkommaanteil ist die nächste Ziffer. Mit dem Nachkommaanteil wird fortgefahren. Zur Formalisierung bezeichnen wir mit $[y]$ den Vorkommaanteil von $y \in \mathbb{R}$ (d.h. die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich y ist); ausserdem schreiben wir $\{y\} := y - [y]$ für den Nachkommaanteil (auch gebrochener Teil genannt).

Der Dezimalziffer-Algorithmus lautet dann: Wir setzen $a_0 := 0$ und $x_1 := x$ und definieren sukzessive die Folgen $a_n := [x_n 10]$, $x_{n+1} := \{x_n 10\}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir erhalten die Darstellung

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots$$

mit $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, von denen unendlich viele ungleich 9 sind; diese Darstellung ist eindeutig. Führe die [Arbeitsaufträge 1 bis 5](#) aus.

Anstatt zur Basis $b = 10$ können wir auch zu anderen Basen entwickeln. Dazu wird $a_n = [x_n b]$, $x_{n+1} = \{x_n b\}$ iteriert. Die Ziffern a_n liegen dann in $\{0, 1, \dots, b-1\}$ und sind ab einem Index nicht alle gleich $b-1$. Beispiel für solche Basen sind $b = 2$ (dyadische oder binäre Darstellung), $b = 8$ (Oktaldarstellung), $b = 16$ (hexadezimale Darstellung), $b = 60$ (sexagesimale Darstellung), $b = 12$ (duodezimale Darstellung). Führe die [Arbeitsaufträge 6 bis 9](#) aus.

Eine ganz andere Darstellungsvariante ist die Kettenbruchentwicklung, die wir nun betrachten. Sei wieder $x \in (0, 1)$. Wir nehmen den Vorkommaanteil von x , ziehen diesen dann ab und invertieren den Rest; mit diesem Rest wiederholen wir dann das Verfahren. Z.B. ist $20240403/100000000 = 0 + 1/(4 + 1/(1 + 1/(15 + 1/(1 + 1008163/193852)))) = [0, 4, 1, 15, 1, 5, 4, 1, 57, 1, 2, 10, 5, 4]$. Wir setzen $x_0 = x$ und definieren für

$n \in \mathbb{N}$ induktiv reelle Zahlen x_n und ganze Zahlen x_n durch

$$a_n := [x_n], \quad x_{n+1} := \frac{1}{\{x_n\}},$$

falls $a_n \neq x_n$ gilt. Dies nennt man den *Kettenbruchalgorithmus* und man schreibt

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots].$$

Führe die [Arbeitsaufträge 10 bis 13](#) aus. Offenbar gilt $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$, und somit können wir formal

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

schreiben. Wir nennen dies die *Kettenbruchentwicklung* (KBE) von x . Falls die Folge (a_n) endlich ist, sprechen wir von einem endlichen Kettenbruch; die Anzahl der Folgenglieder ist dann die *Länge*. Ist die Folge unendlich, so sprechen wir von einem unendlichen Kettenbruch. Es gilt $x_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$, weshalb wir vom *nten Rest* sprechen. Ein endlicher Kettenbruch beschreibt offenbar eine rationale Zahl; wir definieren die *nte Konvergente* (auch *nter Näherungsbruch* genannt) von x als den Kettenbruch $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{Q}$. Wir halten fest, dass mit dem Kettenbruchalgorithmus $a_0 = 0 \in \mathbb{N}$ und $a_{n+1} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist. Führe die [Arbeitsaufträge 14 bis 17](#) aus.

Als nächstes wollen wir untersuchen, was die Kettenbruchentwicklung von x mit der Zahl x selbst zu tun hat. Die folgenden Aussagen gelten stets für alle relevanten n , d.h. für alle n , wenn der Kettenbruch unendlich ist, und für $n \leq k$, wenn die Länge des Kettenbruches gleich k ist. Als erste Aussage geben wir eine Rekursion für die Konvergenten an. Für die Näherungsbrüche $[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ mit $\text{ggT}(p_n, q_n) = 1$ gelten die Rekursionen

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_0 &= 1, q_1 = a_1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

für $n \geq 2$. Als nächstes fassen wir einige Eigenschaften der Konvergenten $r_n := \frac{p_n}{q_n}, n \in \mathbb{N}$ zusammen. Sei $x \in (0, 1)$ mit KBE $[a_0, a_1, \dots]$ und Konvergenten $r_n = p_n/q_n$. Dann gilt

1. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ für $n \geq 1$,
2. $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$,
3. $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n x_n$ für $n \geq 2$,
4. $q_n \geq q_{n-1} + 1$, also insbesondere $q_n \geq n$, für $n > 1$,
5. die Folge der ungeraden Konvergenten $(r_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend,
6. die Folge der geraden Konvergenten $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend,
7. die Grenzwerte der Folgen $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (r_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ existieren und stimmen überein,
8. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Es folgt, dass die Konvergenten x immer stärker annähern und dass wir sogar den Fehler kontrollieren können. Die Darstellung von x durch die KBE ist sogar eindeutig (wenn man im endlichen Fall verbietet,

dass das letzte Element gleich 1 ist, falls es einen positiven Index hat). Führe die [Arbeitsaufträge 18 und 19](#) aus.

Für uns von besonderem Interesse ist die folgende Eigenschaft. Sei $x \in (0, 1)$ und sei $b \geq 2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. x ist rational.
2. Die Ziffernfolge der b -adischen Entwicklung von x ist periodisch.
3. Die Kettenbruchentwicklung von x ist endlich.

Führe die [Arbeitsaufträge 20 bis 25](#) aus.

Es gilt zusätzlich noch die folgende Äquivalenz:

1. x ist irrational (d.h. nicht rational).
2. Es gibt unendlich viele $p/q \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Den Nutzen der KBE im Vergleich zur Darstellung zur Basis b sieht man daher so. Wir nennen eine rationale Zahl a/b mit $b \in \mathbb{N}$ eine beste Näherung für x , wenn für alle c/d mit $c/d \neq a/b$ und $d \leq b$ gilt

$$|dx - c| > |bx - a|.$$

Es gilt:

1. Jede beste Näherung von x ist eine Konvergente.
 2. Jede Konvergente ist eine beste Näherung, wenn man für x von der Form $[0, 2]$, $[0, 1, a_2, \dots, a_k]$ mit $k \geq 2$ und $[0, 1, a_2, \dots]$ von der Konvergente p_0/q_0 absieht (die tatsächlich keine beste Näherung ist).
- Führe die [Arbeitsaufträge 26 bis 33](#) aus.

Als (weitere Anwendung) zeigen wir, wie mit der KBE eine Lösung der sogenannten Pellischen Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ mit $d > 0$ quadratfrei berechnet werden kann. Berechne dazu die KBE von $\sqrt{d}$. Sei l die Länge der Periode. Falls l gerade ist, so ist $(x, y) = (p_{l-1}, q_{l-1})$ eine Lösung der Pellischen Gleichung und alle Lösungen sind gegeben durch (p_{nl-1}, q_{nl-1}) für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Falls l ungerade ist, so ist (p_{2l-1}, q_{2l-1}) eine Lösung und alle Lösungen sind gegeben durch (p_{2nl-1}, q_{2nl-1}) für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Führe die [Arbeitsaufträge 34 bis 36](#) aus.

Literatur:

1. P. Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer-Verlag, 1996.
2. R. Remmert und P. Ullrich, *Elementare Zahlentheorie*, Birkhäuser Verlag, 1987.
3. A. Dujella, *Number theory*, kolska knjiga, 2021.
4. C. Fuchs, *Irrationalität und Transzendenz*, Vorlesungsskript ETH Zürich, 2008.
5. G. Bard: Sage for Undergraduates, AMS, 2022

Ziffernalgorithmen

Handout

Univ.-Prof. Dr. C. Fuchs
03.04.2024

Grundsätzlich: Gegeben sei eine reelle Zahl x . Wir können annehmen, dass $x \in (0, 1)$, d.h. zwischen 0 und 1 liegt. Gesucht sind Zifferndarstellungen, die eine Näherung der Zahl liefern. Untersucht wird dabei, wie gut die Näherung (im Vergleich zur Anzahl der Ziffern) ausfällt.

Technologieeinsatz mit Sage:

Link zu SageCell: <https://sagecell.sagemath.org/>

Einige nützliche Sage-Befehle: `floor`, `ceil`, `int`, `bin`, `oct`, `continued_fraction`, `convergent`, `period`, `preperiod`, `period_length`, `preperiod_length`, `quotient`, `value`

Programm in Stichworten: Dezimaldarstellung und Darstellung in anderen Basen, Kettenbruchentwicklung, Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung, Bestapproximationen, Anwendung auf das Lösen der Pellschen Gleichung.

Input: Gegeben sei $x \in (0, 1)$.

Output: Wir berechnen eine Folge (a_n) natürlicher Zahlen zur Darstellung (und Approximation) von x wie folgt (dabei bezeichnet $[y]$ den Vor- und $\{y\}$ den Nachkommananteil von y).

Darstellung in Basis b : $a_0 = 0$ und $x_1 = x$ und $a_n = [x_n b]$, $x_{n+1} = \{x_n b\}$.

Kettenbruchdarstellung: $x_0 = x$ und $a_n = [x_n]$, $x_{n+1} = 1/\{x_n\}$ solange $a_n \neq x_n$.

Arbeitsaufträge:

1. Berechne die Dezimaldarstellung von $3/40$, $4/9$ und $3/14$. Was fällt dir auf?
2. Berechne die Dezimaldarstellung von $28/412$.
3. Berechne die Dezimaldarstellung von $111/560$.
4. Berechne die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} - 1$.
5. Zeige, dass

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{10}{9}$$

ist. Warum ist das relevant?

6. Implementiere den Algorithmus zur Berechnung der Darstellung in Basis b in Python.
7. Berechne die Darstellung von $28/412$ zur Basis $b = 2, 16, 60$ sowie 12 .
8. Berechne die Darstellung von $1/n$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 13$ für $b = 10, 7$ und 12 .
9. Recherchiere: Was findest du interessantes über die Oktal-, Duodezimal und Sexagesimaldarstellung heraus?
10. Wende den Kettenbruchalgorithmus an auf $28/412$.
11. Wende den Kettenbruchalgorithmus an auf $111/560$.
12. Wende den Kettenbruchalgorithmus an auf $\sqrt{2} - 1$.
13. Implementiere den Kettenbruchalgorithmus in Python.
14. Schreibe den Kettenbruch $[0, 2, 1, 2]$ als gewöhnlichen Bruch.
15. Schreibe den Kettenbruch $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ als gewöhnlichen Bruch.
16. Berechne die KBE von $419/1730$.

17. Berechne die Konvergente p_1/q_1 sowie p_5/q_5 zu $x = 419/1730$.
18. Verifiziere die Eigenschaften für die Konvergenten anhand von $x = 419/1730$. Berechne insbesondere p_5 und q_5 mit Hilfe der rekursiven Formeln.
19. Prüfe die Eigenschaften für Konvergenten anhand von $x = \sqrt{2} - 1$.
20. Überlege, warum die Zahl $x = 0,1234567891011\dots$ (hinter dem Komma werden einfach der Reihe nach alle natürlichen Zahlen aufgelistet) irrational sein muss.
21. Überlege, warum $\sqrt{2}$ irrational ist.
22. Überlege, warum $(\sqrt{5} - 1)/2$ irrational ist. Fällt dir an den Konvergenten dieser Zahl etwas auf (und kannst du das begründen)?
23. Überprüfe, dass $e - 2 = [0, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 1, \dots]$ ist.
24. Überlege, dass es einen Zusammenhang zwischen dem euklidischen Algorithmus und der KBE gibt (indem du den euklidischen Algorithmus auf a, b mit $\text{ggT}(a, b) = 1$ und den KBE auf $x = a/b$ anwendest).
25. Überlege, was für Zahlen eine periodische KBE haben.
26. Überlege, wie gut die Näherung ist, wenn wir x mit den ersten n Nachkommastellen bei der Darstellung zur Basis b approximieren.
27. Bestimme für $\pi - 3$ die beste Näherung a/b mit $b \leq 10$.
28. Bestimme für $\pi - 3$ die beste Näherung a/b mit $b \leq 1000$.
29. Überlege an selbst gewählten Beispielen, dass die Ausnahmen zu „Konvergente ist eine beste Näherung“ richtig sind.
30. Berechne die Darstellung von $e - 2$ zur Basis $b = 8$ auf 10^{-6} genau.
31. Berechne für $e - 2$ die beste Näherung a/b mit $b \leq 10^6$.
32. Schreibe in Python ein Programm, das zu einer gegebenen Zahl eine rationale Näherung basierend auf der Darstellung zur Basis b mit vorgegebener Ziffernanzahl und eine Fehlerschranke liefert.
33. Schreibe in Python ein Programm, das zu einer gegebenen Zahl und einer Fehlerschranke die beste rationale Näherung basierend auf der KBE liefert.
34. Berechne Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$.
35. Berechne Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - 113y^2 = 1$.
36. Teste in der vorigen Aufgabe, die anderen Konvergenten auf Erfüllen der Gleichung. Was fällt auf?



Erkläre einen Ziffernalgorithmus.

Wie gut lassen sich Ziffern zur Näherung einer reellen Zahl verwenden?

Das hat mir gefallen. Das hat mir nicht gefallen.