Das (a mod b)-Problem

Dr. Ingrid Vukusic

Unterlagen für Lehrende (und Handout)

21.05.2024

1 Einleitung und Aufwärmen

Das (a mod b)-Problem wurde wahrscheinlich zum ersten Mal in den 1980er Jahren betrachtet [3]. Es hängt mit der sogenannten Pierce-Entwicklung zusammen (das ist die Darstellung von reellen Zahlen durch bestimmmte Brüche, ähnlich wie die Kettenbruchentwicklung). Das (a mod b)-Problem ist aber an sich schon eine sehr nette Spielerei, und wir gehen deshalb nicht näher auf den weiteren Kontext ein, sondern starten gleich los. Es sei nur erwähnt, dass sich auch der berühmte Mathematiker Paul Erdős mit diesem Problem beschäftigt hat [2], und dass das Problem noch nicht gelöst ist und vor kurzem wieder aufgegriffen wurde [1].

Bevor wir das Problem erklären, machen wir ein kurzes Aufwärmen zum Thema modulo Rechnen. Dabei verwenden wir nur die folgende einfache Definition (modulo-Rechnen kann man sonst auch allgemeiner auffassen): Für ganze Zahlen $a, b \geq 1$ definieren wir

$$a \text{ mod } b = \text{der Rest bei Division von } a \text{ durch } b.$$

Aufwärmen: modulo rechnen

Level 1: Ergänze:

$37 \text{ mod } 5 = ?$
$26 \text{ mod } 9 = ?$
$18 \text{ mod } 4 = ?$
$77 \text{ mod } 11 = ?$
$72 \text{ mod } 13 = ?$

Level 2: Ergänze:

$? \text{ mod } 10 = 3$
$? \text{ mod } 7 = 6$
$? \text{ mod } 8 = 5$

Level 3: Finde alle Möglichkeiten, wie man die Rechnungen aus Level 2 ergänzen kann.

Level 4: Ergänze:

$10 \text{ mod } ? = 3$
$10 \text{ mod } ? = 2$
$16 \text{ mod } ? = 1$

Level 5: Finde alle Möglichkeiten, wie man die Rechnungen aus Level 4 ergänzen kann.

Level 6: Seien a, c positive ganze Zahlen. Beschreibe alle Zahlen ?, welche die Gleichung $a \text{ mod } ? = c$ erfüllen.

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung:

Lösungen: Level 1: 2, 8, 2, 0, 7; Level 2 und 3: $10k + 3$, $7k + 6$, $8k + 5$; Level 4 und 5: 7, 4 und 8, 3 und 5 und 15; Level 6: alle Teiler von (c-a), die gößer als c sind.

2 Das Problem

Kommen wir jetzt zum (a mod b)-Problem. Man startet mit zwei ganzen Zahlen $a, b \geq 1$. Das a bleibt immer fix. In jedem Schritt berechnet man a mod b und das Ergebnis ist das neue b. Schauen wir uns ein Beispiel an:

$$\begin{aligned} 35 \bmod 22 &= 13, \\ 35 \bmod 13 &= 9, \\ 35 \bmod 9 &= 8, \\ 35 \bmod 8 &= 3, \\ 35 \bmod 3 &= 2, \\ 35 \bmod 2 &= 1, \\ 35 \bmod 1 &= 0. \end{aligned}$$

Sobald wir bei 0 angekommen sind, müssen wir natürlich aufhören, da der Rest bei Division durch Null nicht definiert ist. Das Verfahren lautet also: ersetze in jedem Schritt b durch (a mod b), bist du bei $b = 0$ angekommen bist. Dabei wird das b immer kleiner (da a mod $b < b$ nach Definition). Daher endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten und ist damit ein Algorithmus. Wir definieren nun $L(a, b)$ als die Anzahl der Schritte, die gemacht werden müssen, bis der Algorithmus abbricht. Im oberen Beispiel hatten wir genau 7 Rechenschritte (7 Zeilen). Deshalb ist $L(35, 22) = 7$. Wir sprechen informell auch von einer „Kette der Länge 7“.

Grob gesagt, ist das (a mod b)-Problem nun das folgende: *Wie bekommt man die längsten Ketten bei möglichst kleinem a, und wie lang sind diese Ketten?*

3 Stift-und-Paper-Challenge

Um ein Gefühl für ein Problem zu bekommen, ist es oft am besten, zuerst mit Stift und Paper herumzuprobieren. Deshalb starten wir mit folgender Challenge.

„Stift-und-Papier-Challenge“: Findet möglichst lange Ketten!

Findet $(a, b) \neq (22, 35)$, sodass $L(a, b)$ möglichst groß ist! Wer die längste Kette findet, gewinnt.

Weitere Fragen/Ideen:

- Kann man beliebig lange Ketten bekommen?
- Wie kann man zu einem fixen b möglichst effizient ein a finden, sodass $L(a, b)$ maximal ist?
- Für welche a, b gilt $L(a, b) = 1$? Für welche a, b gilt $L(a, b) = 2$?
- ...

MAJA wird gefördert vom Bundesministerium für Frauen, Wissenschaft und Forschung:

Als diese Einheit zum ersten Mal durchgeführt wurde, war der Rekord $L(69, 187) = 10$. Einige Schülys[1] haben mehr oder weniger zufällig Zahlen durchprobiert, andere haben auf bestimmte Primfaktoren geachtet und andere kreative Überlegungen angestellt.

Eine Liste mit längsten Ketten wobei das a minimal ist, findet man in [2, S. 51]. Es kann interessant sein, die längsten gefundenen Ketten der Schülys mit den „optimalen Ketten“ zu vergleichen.

4 Suche mit dem Computer

Wenn die Schülys bereits Grundlagen im Programmieren haben, können sie sofort mit der nächsten naheliegenden Aufgabe starten.

Auftrag: Lasst euch vom Computer Helfen!

Schreibt folgende Funktionen/Programme (in euer Lieblingsprogrammiersprache):

1. Input: positive ganze Zahlen a,b
   Output: L(a,b)
2. Input: positive ganze Zahl a
   Output: Ein b, sodass L(a,b) maximal ist; sowie L(a,b) (:= L(a))

Findet möglichst lange Ketten! (Die längste bekannte Kette mit optimalem a hat übrigens Länge 46.)

Wie schnell sind eure Algorithmen? Gebt eine obere Schranke an, wie viele Rechenschritte eure Funktion/ euer Programm machen muss, bis das Ergebnis (L(a,b) bzw. L(b)) da ist. Die Schranke wird vermutlich von der Größe von a und b abhängen.

Die gesamte Aufgabe ist wohl etwas zu ambitioniert für eine Einheit. In der durchgeführten Einheit haben die Schülys aber jedenfalls sehr lange Ketten gefunden (Rekord: 35) und sich sehr darüber gefreut. Sie haben auch z.B. festgestellt, dass man immer nur $b \geq a/2$ durchprobieren muss. Trotzdem war noch viel Spielraum nach oben offen, wie man die Algorithmen verbessern hätte können. Mit diesem Auftrag kann man erfahrungsgemäß jedenfalls viele Stunden und Nächte verbringen, in verschiedene Richtungen denken und viele Dinge herausfinden.

5 Bekannte Resultate und Ausblick

In der Einleitung wurde erwähnt, dass das (a mod b)-Problem ein offenes Problem ist. Doch was ist damit genau gemeint? Man kann sich überlegen, dass man prinzipiell beliebig lange Ketten erzeugen kann (das ist nicht ganz offensichtlich, aber eine spannende und elementar lösbare Aufgabe). Dabei wird das a aber sehr schnell sehr groß werden. Die Frage ist: Wie lang sind die längsten Ketten im Verhältnis zu a? Sei

$$L(a) := \max_{b=1,\dots,a} L(a, b).$$

[1] entgendert nach Phettberg

In [2] wurde bewiesen, dass man unendlich viele a finden kann, sodass $L(a) > 0.95 \log a$. Andererseits, wurde in [3] bewiesen, dass für alle a gilt $L(a) < 2\sqrt{a}$. Diese obere Schranke selbst zu beweisen ist ebenfalls eine schöne und elementar lösbare Aufgabe. Die Schranke wurde in [2] verbessert zu einer Schranke der Form $L(a) < c \cdot a^{1/3+\varepsilon}$ und neulich in [1] zu $L(a) < c \cdot a^{1/3-2/177+\varepsilon}$. Grob gesagt, wissen wir aktuell über die längsten Ketten nur, dass

$$\log a \lessapprox L(a) \lessapprox a^{1/3}.$$

Somit besteht zwischen der unteren und der oberen Schranke für die längsten Ketten ein ziemlich großer Gap. Das übergeordnete Ziel ist es, diesen Gap zu schließen. Wie lang sind die längsten Ketten wirklich? Gibt es unendlich viele Ketten die doch deutlich länger sind als $\log a$? Oder ist $\log a$ das „wahre Verhalten“. Im Moment hat man noch keine Beschreibung dafür, welche Ketten genau die längsten Ketten sind und es ist gar nicht so leicht, besonders lange Ketten zu finden.

Literatur

[1] Z. Chase and M. Pandey. On the length of pierce expansions, 2022, 2211.08374.

[2] P. Erdős and J. O. Shallit. New bounds on the length of finite Pierce and Engel series. *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)*, 3(1):43–53, 1991. URL: `http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_1991__3_1_43_0`.

[3] J. O. Shallit. Metric theory of Pierce expansions. *Fibonacci Quart.*, 24(1):22–40, 1986.