

Multiplikativ abhängige Tupel

Handout

Dr. Ingrid Vukusic
02.04.2024

Ein Tupel ist eine endliche Liste von Objekten. Prinzipiell dürfen sich dabei Objekte wiederholen, und die Reihenfolge spielt eine Rolle, z.B. sind $(42, A, A, \{5, ?\})$ und $(A, 42, A, \{5, ?\})$ zwei verschiedene Tupel. Wir werden uns hier nur mit Tupeln ganzer Zahlen beschäftigen. Kleine Tupel haben spezielle Namen; zum Beispiel ist $(2, 7)$ ein Paar, $(7, -3, -4)$ ist ein Tripel, $(5, 6, 1, 7)$ ist ein Quadrupel usw.

Grob gesagt nennen wir ein Tupel ganzer Zahlen *multiplikativ abhängig*, wenn man ein bestimmtes „Kürzungsspielchen“ damit gewinnen kann. Es sei kurz erwähnt: das Konzept der multiplikativen Abhängigkeit taucht im Gebiet der Zahlentheorie immer wieder auf, z.B. wenn man sogenannte untere Schranken für Linearformen in Logarithmen anwenden will um Diophantische Gleichungen zu lösen. Außerdem ist multiplikative Abhängigkeit an sich Gegenstand aktueller Forschung (siehe z.B. [1, 3]). Insbesondere werden wir uns später mit offenen Fragen zu aufeinanderfolgenden multiplikativ abhängigen Tripeln beschäftigen.

Um das „Kürzungsspielchen“ zu erklären, starten wir mit dem Bruch

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{12}.$$

Dieser lässt sich natürlich zu 1 kürzen. Deshalb sagen wir, wir haben das „Kürzungsspielchen“ mit dem Tripel $(3, 2, 12)$ gewonnen. Dabei haben wir den 2-er mehrfach verwendet; das ist erlaubt. Eine andere Möglichkeit, das Spielchen zu gewinnen, wäre z.B. mit dem Paar $(2, 8)$, denn $(2 \cdot 2 \cdot 2)/8 = 1$. Man kann das Spielchen mit beliebig vielen verschiedenen Tupeln gewinnen. Hier ist ein etwas komplizierterer Bruch:

$$\frac{16 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18}.$$

Auch dieser Bruch lässt sich zu 1 kürzen. Deshalb möchten wir das Quadrupel $(16, 3, 2, 18)$ *multiplikativ abhängig* nennen. Um diese Idee zu formalisieren, schreiben wir den Bruch auf als

$$\frac{16 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18} = 16^1 \cdot 3^2 \cdot 2^{-3} \cdot 18^{-1}.$$

Wir möchten Zahlentupel $(a_1, \dots, a_n)$ *multiplikativ abhängig* nennen, wenn sie eine solche Eigenschaft haben. Wir versuchen eine sinnvolle Definition zu finden.

Vorläufige Definition: Wir nennen ein n -Tupel ganzer Zahlen $(a_1, \dots, a_n)$ *multiplikativ abhängig*, falls ganze Zahlen $k_1, \dots, k_n$ existieren, sodass

$$a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} = 1.$$

In unserem Beispiel von vorher war $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (16, 3, 2, 18)$ und $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -3, k_4 = -1$. Als nächstes überlegen wir, ob diese Definition sinnvoll ist. Nehmen wir das Tripel $(2, 3, 5)$. Man könnte z.B. schreiben

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2^{1-1} \cdot 3^{1-1} \cdot 5^{1-1} = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1.$$

Das heißt, nach unserer vorläufigen Definition, wäre $(2, 3, 5)$ multiplikativ abhängig. Macht das Sinn? Nicht wirklich. Erstens haben die Zahlen $2, 3, 5$ nun wirklich nichts miteinander zu tun (in einem multiplikativen Sinn; sie haben z.B. keine gemeinsamen Primfaktoren). Zweitens, wäre nach dieser Idee fast jedes beliebige Zahlentupel multiplikativ abhängig, da man ja immer schreiben kann $a_1^0 \cdots a_n^0 = 1$, solange die Zahlen a_i ungleich Null sind. Wir möchten nun genau diesen Trick verbieten und legen unsere endgültige Definition fest.

Definition: Wir nennen ein n -Tupel ganzer Zahlen $(a_1, \dots, a_n)$ *multiplikativ abhängig* (m.a.), falls ganze Zahlen $k_1, \dots, k_n$ existieren, nicht alle gleich Null (d.h. mindestens ein k_i ist ungleich Null), sodass

$$a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} = 1.$$

Diese Definition ist tatsächlich die in der Zahlentheorie übliche Definition. Wir werden später sehen, dass auch andere Definitionen denkbar sind.

Um ein erstes Gefühl für Multiplikative Abhängigkeit zu bekommen, gibt es für das Lesy bzw. die Schülys¹ ein paar Aufgaben. Dabei ist es völlig in Ordnung z.B. nur bei Level 1 zu bleiben; man darf aber auch zum nächsten Level gehen, bevor man ein Level vollständig gelöst hat. Wir bezeichnen die Aufgaben als „Training“, weil m.a. Paare bereits gut verstanden sind. Das sieht bei Tripeln anders aus – dort wird es später den „Ernstfall“ geben.

TRAINING: Findet m.a. Paare!

Level 1: Welche der folgenden Paare sind m.a.?

$(5, 25), (2, 16), (3, 7), (9, 27), (2, 6), (6, 18), (25, 125)$

Level 2: Finde eigene m.a. Paare!

Level 3: Gib ein „Rezept“ an, wie man beliebig viele m.a. Paare finden kann.

Level 4: Gib ein Rezept an, wie man alle m.a. Paare ganzer Zahlen finden kann (Bonus: inkl. Beweis).

Level 5: Finde zwei aufeinanderfolgende m.a. Paare. Genauer gesagt, finde ganze Zahlen $1 < a < b$, sodass (a, b) m.a. ist und $(a + 1, b + 1)$ ebenfalls m.a. ist.

Lösung für Level 1: die folgenden Paare sind m.a.: $(5, 25), (2, 16), (9, 27), (25, 125)$.

Tatsächlich gilt (Lösung von Level 4): Ein Paar (a, b) positiver ganzer Zahlen ist m.a. genau dann, wenn es die Form $(a, b) = (q^x, q^y)$ hat, mit ganzen Zahlen $q \geq 1$ und $x, y \geq 0$. (Dies lässt sich leicht auch auf negative Zahlen ausweiten, aber wir bleiben der Einfachheit halber bei positiven ganzen Zahlen.) Dass Paare der Form $(a, b) = (q^x, q^y)$ tatsächlich m.a. sind, sieht man sofort: $(q^x)^{-y} \cdot (q^y)^{-x} = 1$. (Falls $x = y = 0$, können die Exponenten beliebig gewählt werden.) Die andere Richtung des Beweises ist nicht ganz so einfach, aber elementar möglich (indem man sich die Primfaktorisationen anschaut). Dies wird dem ambitionierten Lesy/Schüly überlassen.

Zu Level 5: Die Paare $(2, 8)$ und $(3, 9)$ sind eine Lösung. Tatsächlich sind die beiden Paare die einzigen mit dieser Eigenschaft! Wir machen einen kurzen Ausflug, wie man diese Aussage beweisen kann (unter Verwendung anderer Resultate aus der Zahlentheorie). Dazu eine Definition: Wir nennen alle Zahlen

¹entgendert nach Phettberg

der Form q^x mit ganzen Zahlen $q \geq 1$ und $x \geq 2$ *perfekte Potenzen*. D.h. perfekte Potenzen sind alle Quadratzahlen, Kubikzahlen usw., wie z.B. 4, 8, 9, 16, 25, Wenn man sich die kleinsten perfekten Potenzen anschaut, sieht man, dass 8 und 9 direkt aufeinanderfolgende perfekte Potenzen sind. Es stellt sich die Frage: gibt es weitere solche direkt aufeinanderfolgende perfekte Potenzen. Wenn man ein bisschen weitersucht, findet man jedenfalls keine. Tatsächlich haben sich diese Frage schon Mathematikys vor mehr als hundert Jahren gestellt. Sie haben vermutet („Catalansche Vermutung“), dass 8 und 9 die einzigen aufeinanderfolgenden perfekten Potenzen sind. Dies wurde 2002 von einem rumänischen Mathematiker in einem sehr spektakulären Paper bewiesen [2]. Doch wie hilft uns das bei unserem Problem? Wir nehmen an, (a, b) und $(a + 1, b + 1)$ sind jeweils m.a. Wegen Level 4 und wegen $1 < a < b$ wissen wir, dass $(a, b) = (q^x, q^y)$ mit $q \geq 2$, $x \geq 1$, $y \geq 2$. Also ist b eine perfekte Potenz. Nach dem gleichen Argument ist auch $(a + 1, b + 1) = (p^r, p^s)$ und $b + 1$ ist eine perfekte Potenz. Also sind b und $b + 1$ zwei aufeinanderfolgende perfekte Potenzen. Da die Catalansche Vermutung bewiesen ist, wissen wir, dass $b = 8$ und $b + 1 = 9$ sein müssen. Damit muss $a = 2$ oder $a = 4$ sein; $a = 4$ funktioniert nicht, also ist $a = 2$ und $b = 8$.

Wir verstehen die Situation rund um m.a. Paare und aufeinanderfolgende m.a. Paare also gut. Jetzt kommen wir zu Tripeln, wo es ganz anders aussieht. Es folgen wieder Aufgaben und es gilt das Gleiche wie vorher: Es ist völlig in Ordnung z.B. bei Level 1 zu bleiben, man darf aber auch zum nächsten Level gehen, bevor man ein Level vollständig gelöst hat. Diese Aufgaben nennen wir „Ernstfall“ weil die Situation zu Tripeln tatsächlich noch nicht zufriedenstellend geklärt ist (für das untenstehende Level 5 gibt es z.B. keine wirklich zufriedenstellende Lösung).

„ERNSTFALL“: Findet m.a. Tripel!

Level 1: Welche der folgenden Tripel sind m.a.?

$(2, 3, 6)$, $(3, 5, 11)$, $(2, 5, 50)$, $(3, 9, 11)$, $(2, 3, 8)$, $(2, 6, 9)$, $(6, 15, 30)$

Level 2: Finde eigene m.a. Tripel!

Level 3: Gib ein „Rezept“ an, wie man beliebig viele m.a. Tripel finden kann.

Level 4: Finde zwei aufeinanderfolgende m.a. Tripel, genauer gesagt, finde ganze Zahlen $1 < a < b < c$, sodass sowohl (a, b, c) als auch $(a + 1, b + 1, c + 1)$ m.a. sind.

Level 5: Gib ein Rezept an, wie man alle m.a. Tripel ganzer Zahlen finden kann.

Lösung für Level 1: die folgenden Tripel sind m.a.: $(2, 3, 6)$, $(2, 5, 50)$, $(3, 9, 11)$, $(2, 5, 8)$, $(2, 6, 9)$.

Dabei beobachten wir: In den Tripel $(3, 9, 11)$ und $(2, 5, 8)$ haben die Zahlen 11 und 5 eigentlich nichts mit den anderen Zahlen zu tun. Nach unserer Definition sind diese Tripel aber m.a., denn wir können schreiben: $3^2 \cdot 9^{-1} \cdot 11^0 = 1$ und $2^3 \cdot 5^0 \cdot 8^{-1} = 0$. In unserer Definition war nur verboten, dass alle Exponenten gleich Null sind. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, ob diese Definition wirklich sinnvoll war. Vor allem, wenn wir uns Level 4 anschauen: Mit diesem Trick finden wir tatsächlich ganz viele aufeinanderfolgende m.a. Tripel; z.B. sind alle Tripel der Form $(2, 8, c)$ und $(3, 9, c + 1)$ m.a. Und man kann noch viel mehr solche Tripel definieren. Z.B. sind Tripel der Form $(q^x, q^y, (q^x + 1)^2 - 1)$ und $(q^x + 1, q^y + 1, (q^x + 1)^2)$ aufeinanderfolgende m.a. Tripel. Deshalb macht es Sinn, unsere Definition zu modifizieren, um solche Tricks auszuschließen.

Definition: Seien a, b, c ganze Zahlen größer als 1. Wir nennen das Tripel (a, b, c) *2-multiplikativ abhängig* (*2-m.a.*), falls bereits eines der Paare (a, b) , (a, c) , (b, c) m.a. ist. Falls (a, b, c) m.a. aber nicht 2-m.a. ist, nennen wir es *3-multiplikativ abhängig* (*3-m.a.*).

In Level 1 waren also die Tripel $(3, 9, 11)$ und $(2, 5, 8)$ 2-m.a.; die Tripel $(2, 3, 6)$, $(2, 5, 50)$, $(2, 6, 9)$ waren 3-m.a.

Jetzt sehen wir uns Level 4 nochmal an: Gib es ganze Zahlen $1 < a < b < c$, sodass (a, b, c) und $(a + 1, b + 1, c + 1)$ jeweils 3-m.a. sind? Wenn man diese Frage einem Mathematiker stellt, das sich noch nicht mit dieser Frage beschäftigt hat, wird es wahrscheinlich sagen: „Keine Ahnung, aber ich tippe mal auf nein?“. Tatsächlich gibt es aber solche Tripel, z.B. sind $(9, 49, 63)$ und $(10, 50, 64)$ beide 3-m.a. Die Autorin dieses Beitrages hat diese Tripel gefunden, indem sie dem Computer beigebracht hat, wie man Tripel auf die Eigenschaft 3-m.a. überprüft, und dann mit Gewalt alle Tripel mit Einträgen kleiner gleich 1000 durchprobiert hat. Eine solche Suche mit dem Computer dauert etwas Zeit (Größenordnung ca. 20 Minuten) und liefert insgesamt 13 solche Tripel (a, b, c) .

Eine spannende Frage ist: Gibt es unendlich viele solcher Tripel? Im Moment ist ungeklärt, ob es unendlich oder nur endlich viele aufeinanderfolgende 3-m.a. Tripel gibt. Um der Antwort näher zu kommen, ist es hilfreich, möglichst viele solcher Tripel zu finden. Natürlich liefert eine Suche nicht direkt eine Antwort oder gar einen Beweis. Allerdings besteht die Hoffnung, dass man vielleicht ein hilfreiches Muster erkennen kann. Genau das ist nämlich bei einer ähnlichen Frage passiert, mit der sich die Autorin beschäftigt hat: Gibt es unendlich viele ganze Zahlen $1 < a < b < c$ mit $(a, b) \neq (2, 8)$, sodass (a, b, c) , $(a + 1, b + 1, c + 1)$ und $(a + 2, b + 2, c + 2)$ jeweils m.a. sind. Hier wurde also nicht 3-m.a. gefordert, dafür aber drei aufeinanderfolgende Tripel. Tatsächlich ergab sich bei der Suche ein Muster: einige der Tripel hatten die Form $a = 2$ und $b + 2 = 2^n$ für positive ganze Zahlen n . Die Autorin stellte fest, dass es eine ganze „Familie“ drei aufeinanderfolgender m.a. Tripel gibt, nämlich von der Form $(a, b, c) = (2, 2^n - 2, 2^{2n} - 2^{n+1})$.

Die Autorin erwartet nicht, dass sich eine ähnliche Familie von zwei aufeinanderfolgenden 3-m.a. Tripeln finden lassen wird. Eine Suche nach mehr Tripeln könnte trotzdem sehr hilfreich sein um vielleicht irgendeine andere Art von Muster zu erkennen. Die Schwierigkeit ist, dass eine reine „brute force“ Suche nicht viele Tripel liefern wird. Will man z.B. bis 10 000 statt bis 1000 suchen, muss man schon ca. 10^{12} viele Tripel überprüfen. Da die Überprüfung auf die Eigenschaft 3-m.a. relativ lange dauert (man muss große Zahlen faktorisieren!), stößt man hier schon an die Grenzen der Technologie. Deshalb ist nun der Auftrag:

AUFTRAG

Findet (möglichst viele) ganze Zahlen $1 < a < b < c$ mit der Eigenschaft, dass (a, b, c) und $(a + 1, b + 1, c + 1)$ jeweils 3-m.a. sind!

Dazu zwei Ideen:

1) Schaut euch eure Rezepte aus dem Level 3 für Tripel an. Vielleicht erlauben sie es, Tripel zu konstruieren, welche schon nach Konstruktion 3-m.a. sind. Damit muss man dann nur noch überprüfen, ob $(a + 1, b + 1, c + 1)$ 3-m.a. ist. Das könnte sehr viel Zeit sparen.

2) Es lohnt sich, mit Stift und Paper ein bisschen zu überlegen, was bei der Suche sinnvoll ist. Z.B. ist der

Autorin Folgendes aufgefallen: Nehmen wir kurz an, dass nur eine der Zahlen a, b, c gerade ist; sagen wir a ist gerade und b, c sind ungerade. Dann kann (a, b, c) gar nicht 3-m.a. sein, weil sich der 2-er aus dem a nicht wegkürzen kann. Solche Tripel muss man also gar nicht erst überprüfen. Ein zweiter Gedanke: Stellen wir uns kurz vor, a und b sind gerade und c ist ungerade. Dann könnte (a, b, c) prinzipiell 3-m.a. sein. Aber dann sind $a + 1$ und $b + 1$ ungerade und $c + 1$ ist gerade und damit kann $(a + 1, b + 1, c + 1)$ nicht 3-m.a. sein.

Beim Auftrag geht es darum, kreativ zu sein und mithilfe des Computers neue Tripel zu finden. Dabei ist sowohl Programmiergeschick gefragt, als auch „Stift-und-Papier“-Ideen („Rezepte“ aus Level 3, sowie Argumente wie die zwei vorher erwähnten Ideen). Natürlich gehört auch Glück dazu – deshalb ist es gut, wenn mehrere verschiedene Teams daran arbeiten – eine der Strategien wird hoffentlich zum Erfolg führen. Für die Suche wird eine Python Funktion zur Verfügung gestellt, mit welcher Tripel auf die Eigenschaft 3-m.a. überprüft werden können.

Literatur

- [1] A. Dubickas and M. Sha. Multiplicative dependence of the translations of algebraic numbers. *Rev. Mat. Iberoam.*, 34(4):1789–1808, 2018. doi:10.4171/rmi/1043.
- [2] P. Mihăilescu. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan’s conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 572:167–195, 2004. doi:10.1515/crll.2004.048.
- [3] I. Vukusic and V. Ziegler. Consecutive tuples of multiplicatively dependent integers. *J. Number Theory*, 2021. doi:https://doi.org/10.1016/j.jnt.2021.07.021.

WANTED

DEAD OR ALIVE

Ganze Zahlen $1 < a < b < c$ mit
der Eigenschaft, dass (a, b, c)
und $(a+1, b+1, c+1)$ beide
3-multiplikativ abhängig sind.

Bereits gefunden:

$(4, 12, 324), (4, 44, 242), (6, 54, 384),$
 $(7, 23, 161), (9, 49, 63), (10, 32, 80),$
 $(12, 24, 64), (12, 24, 324), (12, 64, 324),$
 $(16, 50, 80), (24, 64, 324), (25, 51, 255),$
 $(48, 54, 384)$

ARMED AND VERY DANGEROUS

CASH 20000\$ *

REWARD

* ausgezahlt in Ruhm und Ehre

Bild von dgim-studio auf Freepik